Math Un 178.

Mathesis. Opera varia. mathes. ill

90.

<36613875640014 S

<36613875640014

Bayer. Staatsbibliothek

E

Ueber Newtons Scharfsinn,
insbesondre
über dessen
Sagacität
in
Analysis.

Von
C. L. Schübler.

— Apicem, et latera ardua cernant
Atlantis, cinctum assidue cui nubibus —
Caput . . .

Virgil.

Mit eingezeichneten geometrischen Figuren.

Leipzig,
1794.

R

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Mein Verlangen, das Studium der Mathematik nach Möglichkeit zu verbreiten, und die kleine Zahl der Liebhaber in diesem Fache, so viel an mir liegt, zu vermehren, hat mich bereits zu der Herausgabe verschiedener Abhandlungen, die sich mit Analysis und Geometrie beschäf-

tigen, seit 1788 veranlaßt. Nähere Aeusserungen darüber, welche insbesondere in der Einleitung zu meinen

Erforschungen in Geometrie

und weiter in meinen

Betrachtungen über die Hyperbel,

anzutreffen sind, will ich hier nicht wiederholen.

Daß ich gegenwärtig es namentlich gewagt habe, die Erweiterungen der Mathematik, welche die Welt Newton zu verdanken hat, nach meinen Kräften bekannter zu machen, möchte aber vielleicht doch noch einer Rechtfertigung eben hier bedürfen.

Newtons Lob erschallt an allen Ekken und Enden des gelehrten Publikums;

Seine

Seine Verdienste sind allgemein anerkannt; — Allein, wenn nach genauer Auskunft darüber gefragt wird; wenn der neugierige Jüngling wissen will, durch welche scharfsinnige Erörterungen dann sich Newton eigentlich so ausgezeichnet habe, worauf dieselben dann bestimmt ankommen oder abzielen, aus welchen verstekkt-gelegenen Begriffen er seine gerühmte Entdekkungen hervorgezogen, und was deren Entdekkung befoerdert habe; — wenn darnach gefragt wird, wie viele Gelehrte haben Cultur genug, um nur einigermasen befriedigend darauf zu antworten? — Wie wenige auch, wenn sie Mathematik lieben, sind mit Newtons Schriften versehen? und, wenn sie auch

dieselbe in die Hände bekommen koennen, wie wenige haben Lust, Zeit und Musse, sich mit deren Lectüre zu beschäftigen?

Theils die zusammengesezzte Vorerkenntnisse, welche nöthig sind, um seine Entdekkungen nur zu verstehen, theils die die allzugedrungene Kürze seines Vortrags *) werden es freilich unmöglich machen

---

(*) Voltaire sagt in einem seiner Briefen über die Engländer (L. XIV.) Tres peu de personnes lisent Des Cartes, dont effectivement les ouvrages sont devenus inutiles; tres peu lisent aussi Newton, parcequi'l faut etre fort savant, pour le comprendre. — Beinahe sollte man, wenn man die Seltenheit der Lectüre in Newtons Schriften selbst erwägt, glauben, der Ausspruch der Entbehrlichkeit passe heut zu Tage nicht blos auf Descartes. Aber der Ausspruch gegen das Studium des Cartesischen

machen, daß er von vielen gelesen werde. Allein dieser Schwierigkeiten ungeachtet, mus es doch immer sehr interessant seyn, und bleiben, von Newtons Ausspähungen und Mittheilungen nicht blos oberflächliche Nachrichten sich bekannt zu machen, nach seinen Ideengänger (wenn gleich nicht nach allen, doch nach mehrern derselben, die von besonders grosem Einfluß waren,) sich genau zu erkundigen, und dem Wandel der Medita-

---

sischen Schristen selbst scheint mir in der That für sich schon nicht geprüft genug. Descartes verdient gewiß noch bis auf den heutigen Tag zum grösern Theil (zumal in Geometrie und Analysis) gelesen und studirt zu werden.

tionen des grosen Mannes forschend nachzuhängen.

Aus unsern teutschen Lehrbüchern der Mathematik (auch aus den meisten französischen) erfährt man, so viel auch darinn Newtons Entdekkungen benüzzt werden, nur selten, was ihm eigentlich gehöre; noch weniger lernt man die Wege kennen, welche er gegangen ist, um in seinen Erörterungen zum Ziele zu gelangen. Allerdings erträgt es auch die Absicht, und Beschränkung solcher Lehrbegriffe nicht, hierüber zureichende Auskunft zu ertheilen. Ein Buch, in welchem es sich jemand zum besondern Geschäft machte, viele bedeutende Vorträge Newtons zu sammeln, und mit Erläuterungen darzulegen, möchte al-

so wol nicht überflüssig genennt werden können. Auf die Ausführung der einzelnen zur Hand genommenen und beleuchteten Untersuchungen kommt freilich hierauf erst alles noch an. Ich habe meinen Plan nicht zu weit ausgedehnt, und mich auf Newtons Erörterungen in Analysis und Geometrie, — und auch auf diese mit Auswahl — eingeschränkt. Ob zu hoffen sei, daß meine Arbeit Nuzzen stiften, und Liebhabern von Mathematik gute Unterhaltung gewähren dürfte, mus ich nun dahin gestellt seyn lassen, und anderer Beurtheilung völlig anheim geben.

Uiber die lezten Blätter der IIIten Diatribe S. 184 ... 186. fühle ich al-

lein Versuchung, noch etwas weniges hinzuzusezzen:

Ich hatte mir bei Anlegung dieser ganzen Schrift vorgenommen, den unangenehmen Streit zwischen Newton und Leibniz über die Erfindung der Differential-Rechnung gar nicht zu berühren; und gegen den Ausgang dieser Diatribe bin ich dennoch durch den Zusammenhang darauf geleitet und verführt worden, einiges darüber zu sagen. — Ich sehe zum voraus, es wird mir hie und da verargt werden, was ich zu Gunsten Newtons geäussert habe, und meine kurze Verwahrung in der Note S. 186. wird mich schwerlich gegen den Tadel deutscher Gelehrten, welche warme Verehrer von Leibnizen sind, retten. Ich ersuche dieselbe, versichert zu seyn, daß ich, ohngeachtet meiner gewagten Bedenklichkeiten, dennoch auch unter diese Verehrer

rer gehöre; und daß mir die Vertheidigung deutscher Ehre so sehr am Herzen liege, als irgend einem Gelehrten unseres Vaterlandes. Sollten sie daran zweifeln, so ersuche ich sie weiter, den Aufsaz nachzuschlagen, oder von irgend einem Freunde dessen Mittheilung sich auszubitten, welcher in das Vte Stück des Deutsch. Merkurs in d. Jahr 1792. aufgenommen worden ist. Ich hoffe, er wird jedem Unfangenen hinlängliche Beweise darlegen, daß ich mir wenigstens vor vielen Hunderten Mühe gegeben habe, einzusehen, worinn Leibnizens Gröse in Mathematik bestehe, was ihn vor unzähligen andern Speculatoren auszeichne, — und daß die Ueberzeugung in mir wohne, er habe kaum seines gleichen gefunden, werde auch schwerlich von einem andern Genie übertroffen werden.

Vol-

Vorrede.

Voltaire sagte es von Newton allein:

> qu'il portoit un esprit createur dans toutes ses recherches

und wer möchte Anstand nehmen, das nehmliche von Leibniz zu behaupten?

Voltaire sagte weiter von Newton allein:

> Dans tout ce qu'il entreprenoit, il changea les idees reçues par les autres hommes.

Und wer möchte es widersprechen, daß die Rede mit gleichem Recht und in voller Maase auf Leibnizen passe?

Geschrieben
zu Heilbronn
am Neckar
den 5. April 1794.

C. L. Schübler.

Ein,

Einleitung.

In allen Jahrhunderten gab es erfinderische Köpfe, welche sich durch Entdeckung wichtiger Warheiten Ruhm erwarben. Nicht allen aber ist gleiche Gerechtigkeit widerfahren, nicht allen ist eine bleibende Ehre auch noch nach ihrem Tod beschieden worden. Isaac Newton scheint unter den wenigen zu seyn, deren Verdienste von Zeitgenossen und von Nachkommen fast ohne Widerspruch unsterblichen Ruhms würdig erkannt worden sind. Auch hat in der That schwerlich der Geist irgend eines Menschen so mannigfaltige und so wich-

tige Warheiten, durch viele Jahrhunderte, ja wol Jahrtausende lang verstekt gelegene Warheiten, in einem Zeitraum weniger Jahre so glüklich entdekt, wie Newton.

Eine genaue Uebersicht seiner Entdekkungen zu geben, ist gewiß ein interessantes, aber kein leichtes Geschäft. Für Anfänger in Mathematik läßt sie sich in der That kaum geben, vollständig durchaus nicht, und für solche, welche der Mathematik ganz unkundig sind, ist gar keine verständliche Uebersicht nur gedenkbar, weil es unmöglich ist, ihnen nur die Ziele eigentlich begreiflich zu machen, auf die Newton bei seinen Ausspähungen ausgieng, und das Interesse, diese Ziele erreicht zu haben, ohne viele Vorkenntnisse, (und Gewandtheit in Geometrie besonders,) niemand zugemuthet werden kann.

Ich will es nicht übernehmen, eine vollständige Reihe von Newtons Produktionen in Geometrie und Analysis zu liefern,

blos

blos über einige seiner vorzüglichsten Erforschungen in diesen Fächern, bin ich gesonnen Betrachtungen anzustellen, welche, (falls ich meines Zweks nicht gar verfehle,) dazu dienen werden, Newtons Scharfsinn näher kennen zu lernen, und vielleicht doch bei einigen Liebhabern von Mathematik den Reiz vermehren dürften, mit seinen übrigen Erfindungen sich vertrauter zu machen.

Was er in der Theorie des Lichts und der Farben, und in höherer Mechanik, insbesondere in Beziehung auf Gravitation, entdekt habe, will ich gegenwärtig gar nicht berühren. Der Stoff ist allzugros. — Sind doch die Gegenstände in Analysis, auf welche ich mich beschränken werde, schon unübersehlich reichhaltig.

Neben Betrachtungen über die gedachte Entdekkungen selbst, (über deren Gehalt und Folgen,) werden Anmerkungen über das Benehmen Newtons in Mittheilung seiner

Erforschungen, über seine Zurückhaltung und Zögerung, durch Beweise andere Forscher zu befriedigen, und über die Art, seine Gedanken zu entwerfen überhaupt, von mir beigefügt werden, welche ich insbesondere Mathematikern, die zugleich Liebhaber der Psychologie sind, zu weiterer Prüfung zu empfelen wage.

I.

Von Newtons Entdekkung des binomischen Lehrsatzes, und seiner Reihen für Kreisbögen.

§. 1.

Räume, von krummen Linien begrenzt, zu quadriren, und wenn ihre vollkommene Quadratur nicht angienge, dennoch ihren Flächen-Gehalt in möglichst-genauen Näherungen anzugeben, — diese Kunst hat bekanntlich in allen Jahrhunderten vorzügliche Köpfe beschäftiget. Newton hieng den Speculationen darüber in dem Zeitraum seines Lebens vom 20sten bis ins 30ste Jahr viel nach, und theilte einen Theil seinet Erforschungen besonders im Jahr 1675 und 1676 verschiedenen Gelehrten, und unter diesen auch dem Hrn. von Leibniz, in Briefen mit. Oldenburg (damals Sekretair der königlichen Academie

mie der Wissenschaften zu London,) ein' Freund von Newton und von Leibnitz zugleich, schrieb an den leztern, (im April 1675.):

"Der englische Mathematiker, Jacob Gregory, habe neulich eine zur Kreisquadratur gehörige Formel entdekt, aber Newton sei schon geraume Zeit vor ihm auf eine bequemere gekommen, welche auch D. Barrow von diesem schon längst erhalten habe. Wenn man in einem Zirkel den Halbmesser r = 1 annehme, sich eine Sehne in demselben von willkührlicher Grösе denke, und deren Helfte, den Sinus, x nenne, (wo also x eine gegebene Grösе vorstellt,) so lasse sich der zu diesem Sinus gehörige Bogen, der allgemein z heissen möge, durch folgende Reihe ausdrücken:

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots\ldots$$

und diese Reihe lasse sich bis ins unendliche fortsezzen."

"Alsdenn könne das Problem aber auch umgewendet, und, wenn ein Bogenstükk eines Kreises gegeben wäre, der dazu gehörige Sinus durch den Bogen z selbst, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \ldots - \ldots$$

Um

Um dazu zu gelangen, müsse man aus der zuerst gesezten Gleichung, (in welcher der Sinus x gegeben ist,) die Wurzel, vermittelst einer gewissen symbolischen Methode, auszuziehen wissen. — —

Ueberdieß besizze Newton aber auch die Kunst, viele andre Flächen, die von andern Curven, nicht blos von Zirkelbögen, begrenzt seien, durch Reihen auszudrükken."

Leibniz dachte dem Beweis nach, auf welchen die Aufstellung dieser ihm mitgetheilten Reihen sich gründen möchte; aber er fand ihn nicht. Daß sie richtig seien, davon konnte er sich wol durch angestellte Proben überzeugen; aber die Gründe der Allgemeinheit dieses Verfarens blieben ihm dennoch verdekt. Er bat sich daher in einem Antwortschreiben an Oldenburg (im Mai 1676, von Paris aus, wo er sich damals aufhielt,) den Beweis dieser Reihen aus, indem er beifügte, er finde sie sehr scharfsinnig ausgedacht.

§. 2.

Oldenburg antwortete hierauf anfangs blos durch den Auszug eines Schreibens von Collins, einem Freund Newtons, und ebenfalls bekannten Mathematiker, welchem Newton fast nichts

von

von seinen Geheimnissen vorenthielt. Dieser Auszug enthielt aber den verlangten Beweis nicht, sondern gab blos einen Aufschluß über die Gesezlichkeit, nach welcher die Coefficienten der einen Reihe fortliefen. Collins schrieb nämlich, man habe sich dieselbe in folgender Zusammensezzung vorzustellen:

$$1, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{40}, \quad \frac{5}{112}; \ldots$$

$$\text{seien} = 1, \quad \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 5}, \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{40 \cdot 6 \cdot 7}; \ldots$$

und diese Reihe gebe also in Rücksicht der Eleganz gewiß keiner andern etwas nach, da das Gesez der Folge durch das 3te und 4te Glied sich schon so sicher und deutlich übersehen lasse.

Newton selbst antwortete etwa 14 Tage später (am Ende des Jun. 1676) umständlicher, und theilte noch dazu die Gesezlichkeit mit, nach welcher die Coefficienten der andern Reihe fortliefen, aber den verlangten Beweis selber hielt er dennoch Leibnizen für izt noch zurük. Zwar entdekte er in diesem sehr interessanten Schreiben das große allgemeine Gesez des von ihm erfundenen

denen binomischen Lehrsazzes, ohne welchen er sicher nie auf seine Reihen für den Zirkel, und für andre Curven gekommen wäre, machte ihn hiebei auch mit seiner von keinem Mathematiker bisher geahndeten Methode, die Wurzeln cubischer und höherer Gleichungen Näherungsweise sehr schnell zu finden, bekannt, und fügte noch verschiedene neue Säzze und Winke zu noch weitern Erforschungen bei. Allein die Art, wie man zu den angeführten Reihen für den Kreis gelangen könne, die bestimmte Prämissen zur Einsicht ihrer Richtigkeit, verrieth doch Newton mit allem dem nicht. Er lies, (was freilich zur Hauptsache gehörte,) blos folgenden Mechanismus richtiger Formeln (daß ich mich so ausdrükke,) Leibnizen deutlich übersehen:

1) Wenn eine binomische Gröse von folgender Gestalt vorkomme: $[P + P.Q]^{\frac{m}{n}}$, in welcher $P + PQ$ die Gröse bedeute, deren Potenz, oder Wurzel, oder deren Beschaffenheit in einer gewissen Dimension überhaupt, man zu wissen verlange, so sei dieses Binomium folgender Reihe gleich:

$$P^{\frac{m}{n}}$$

$$P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ \ldots$$

wobei blos zu merken sei, daß jede vorkommende Gröse, (deren Dimension verlangt würde,) in zwei Theile oder Glieder sich allemal zerlegen lasse, von welchen

das erste P heissen möge;

das 2te PQ, so daß Q den zweiten Theil, durch den ersten (durch P) dividirt, bedeute;

weiter aber, daß in der Reihe selbst, A soviel als $P^{\frac{m}{n}}$ gelte; d. i. dem ersten Glied gleich sei;

B soviel als $\frac{m}{n}AQ$, d. i. dem zweiten (ganzen) Glied gleich sei;

und sofort C in Kürze den Werth des 3ten vorstelle; D des 4ten u. s. w.

Zweitens; daß der Exponent $\frac{m}{n}$ eine bejahte und auch verneinte Gröse, eine ganze Zal und auch einen Bruch vorstellen könne; d. h. daß dieser Signatur einer allgemeinen Gröse, sowol $\frac{2}{1}$, als $\frac{1}{2}$, unterlegt werden könne; die gebrochenen

Expo=

Exponenten aber allemal Wurzelgrösen andeuteten; daß

z. B. $a^{\frac{1}{2}}$ so viel, als $\sqrt[2]{a}$ sei; u. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;

endlich, daß die Brüche

$\frac{1}{a}$; $\frac{1}{aa}$; sich auch a^{-1}; a^{-2}; und $\frac{1}{a^n}$ sich $= a^{-n}$ schreiben liessen.

Drittens, daß auch die schon mitgetheilte Reihe, welche einen Kreisbogen durch den gegebenen zugehörigen Sinus und Radius des Kreises ausdrükke, nach einem gleichförmigen Gesez fortlaufe, so daß in dem 2ten Glied das erste als der eine Faktor wieder vorkomme; in dem 3ten Glied das 2te wieder als Faktor, und so in jedem folgenden Glied das nächstvorgehende ungeändert ein wesentlicher Theil (als der eine Faktor) sei; daher wol verständlich werden dürfte, was

z, oder ein Kreisbogenstükk im Aequivalent

$$= x + \frac{1.1.xx}{2.3.rr}.A + \frac{3.3.xx}{4.5.rr}.B + \frac{5.5.xx}{6.7.rr}.C.$$

bedeute, und wie diese Reihe auf eben die Weise,

wie

wie die für Potenzen eines Binomiums, gebildet sei; (und eben das, was die S. 2. vorgelegte, besage, nur daß jezt der Halbmesser allgemein $= r$, und nicht bestimmt $= 1$ angenommen worden.)

Wenn aber die Aufgabe umgewendet, und der Sinus eines Bogens (x), durch den Bogen (z) und den Radius auszudrükken wäre, so habe man sich die Reihe

$$x = z - \frac{1}{6\,rr}z^3 + \frac{1}{120\,rrrr}z^5 - \ldots + \ldots$$

in folgenden Aequivalent vorzustellen:

$$z - \frac{zz}{2.3.rr}.A - \frac{zz}{4.5.rr}.B - \frac{zz}{6.7.rr}.C..$$

wo alle Glieder vom 2ten an, verneint werden, weil in dem 3ten, 5ten, 7ten, B, D, F, ... vorkommen, und als verneinte Faktoren jedes bejahte Glied zum verneinten machen.

Newton fügte noch Reihen für den Ausdrukk des Sinus Versus bei; auch für die Verhältnis zweier Kreisbögen; ferner für elliptische, hyperbolische Bögen, und noch für andere Curven; gab aber seine Abneigung, synthetische Beweise

Beweise über die dazu gehörigen Säzze zu führen, ziemlich deutlich zu erkennen. „Auf welche Art (schreibt er,) aus Gleichungen, die auf unendliche Reihen reducirt worden, Flächen und Längen gewisser Curven bestimmt werden, auch daraus erzeugte cubische Körper, und Segmente von Figuren aller Art, wie auch die Mittelpunkte der Schwere, welchen allen Solidis zukommen, — das alles zu beschreiben, würde ein viel zu langes Geschäft seyn; und es mag genug seyn, blos einzelne aufgelöste Probleme, welche in das Fach gehören, hier zu recensiren.„ Und hierauf folgen dann die erwähnte Beispiele, — blos Resultate analytischer Erforschungen, ohne beigefügte Beweise.

§. 3.

Leibniz antwortete darauf wieder an Oldenburg, (im Aug. 1676.) und schrieb:

„Newtons Brief sei reichhaltiger an merkwürdigen Angaben und Belehrungen, als ganze Bücher, die bisher über diese Gegenstände der Analysis ans Licht gekommen seien. Die neuen Erfindungen darinn seien ganz Newtons Genie würdig, das man wol schon aus seinen Versuchen in Optik und Katadioptrik kennen gelernt habe.

Newtons Methode, die Wurzeln von Gleichungen, und die Flächen vorgegebener Figuren durch unendliche Reihen anzugeben, sei ganz von der verschieden, die er, Leibniz, bisher gehabt habe, und er wundre sich recht über die Verschiedenheit der Wege, welche doch zu einem Ziele führten. — —

Er wünsche nun nur noch, daß Newton den Ursprung des Theorems von erhöhten Binomien näher zu erkennen geben möchte, sodann die Art, wie er in seinem Verfahren, Wurzeln auszuziehen, auf gewisse allgemeine Signaturen p, q, r, gekommen, auch wie er aus einem Logarithmen die Absolut-Zal suche, und wie sich das aus seiner Methode ableiten lasse."

"Die Zeit habe ihm (Leibniz) bisher gefehlt, Newtons Brief mit der Aufmercsamkeit, den er wol verdiene, durchzustudiren; daher es gar wol seyn könne, daß einige Säzze, die Newton mit Stillschweigen übergangen, in dem Zusammenhang selbst verstekt lägen, und sich als Folgerungen wol noch aus seinem Briefe heraus finden lassen dürften. Allein diese Ergänzungen würde doch niemand lehrreicher als Newton selbst geben können, und man dürfe sicher, wenn

er

er nur die Feder ansezzen möge, interessanter Erweiterungen wissenschaftlicher Kenntnisse von ihm gewärtig seyn.„

Leibniz theilte in diesem Brief die von ihm ersonnene Methode, die Wurzeln vorgegebener Gleichungen zu finden, mit; und fügte noch bei, daß er doch zweifle, ob die mehrste der schwerern Probleme in Analysis sich durch Zurückführung auf Newtons unendliche Reihen auflösen lassen möchten. Dann viele hiengen gar nicht von Gleichungen, noch von Quadraturen ab; z. B. die welche zur verkehrten Methode der Tangenten gehörten. Eines habe er selbst wol noch herausgebracht, welches Descartes vergebens zu lösen gesucht habe *); aber es sei allerdings eben

*) In diesem Brief veranlaßte ein Schreibfehler, oder vielleicht nur ein undeutlich geschriebenes Wort einen besondern Misverstand. Leibniz schrieb: „Curvas qnasdam Cartesius invenire conatur, quarum una est hujus naturae, ut intervallum inter tang. ad Axem productam, & ordinatim applicatam ex curva ad directricem, sit semper idem; recta scil. constans! und Newton las: una est ludus naturae, (anstatt hujus naturae,) daher er auf diese Stelle antwortete: er möchte diese Curve doch eben nicht

eben doch noch vieles in Analysis unberichtigt, und er sehe noch gar manche Lükken von groser Bedeutung. — —

§. 4.

Newton säumte nicht lange, auf dieses Schreiben Leibnizens zu antworten, (im Oct. 1676.) und sein Brief wurde einer der merkwürdigsten unter allen Briefen, die wol je über speculative Wissenschaften zwischen Gelehrten gewechselt worden sind. Er füllt über 28 Seiten in Quart, und dürfte, mit einem genauen Commentar erläutert, gar leicht die Composition eines Buchs, das über ein Alphabet hinaus reichte, veranlassen. Dem Zwekk dieser Blätter gemäs, kann blos folgendes aus diesem Brief ausgehoben werden.

Newton versicherte darinn: „Er habe Leibnizens Schreiben mit ausserordentlichem Vergnügen gelesen. Dessen Methode, zu convergenten Reihen zu gelangen, sei sehr zierlich, und zeige von Leibnizens Scharfsinn, wenn er auch

---

nicht als Spiel der Natur ansehen. — — Erst nach 38 Jahren erklärte sich dieser Misverstand.

auch sonst gar nichts geschrieben hätte, hinlänglich. Aber auch noch manche andre (von Leibnizen) in seinem Brief zerstreut hingeworfene Gedanken erwekkten die Vermutung, daß er wol noch grose Dinge leisten würde. Die Verschiedenheit der Methode, mittelst welcher Leibniz zu eben den Zielen gelange, habe ihn (Newton) sehr unterhalten, zumal da er selbst bisher drei Wege ausgespäht habe, zu unendlichen Reihen zu gelangen, und nicht erwartet hätte, daß noch ein vierter übrig seyn sollte.

Einen von diesen Wegen habe er in seinem vorigen Brief bereits kund gemacht; nun wolle er auch den zweiten entdecken, den, auf welchen er zum erstenmal auf diese Reihen gefallen sei. Er sei aber darauf gefallen, noch ehe er verstanden habe, durch das binomische Theorem Divisionen und Wurzel-Auszüge aller Art zu Stande zu bringen. Indem er dieses erkläre, werde er eben das Fundament des Theorems, nach welchem Leibnizen verlange, offen darlegen."

(Es ist billig, daß ich bei diesem wichtigen Gegenstand Newton selbst direct sprechen lasse. Er hebt also an:)

„Ich war im Anfang meiner mathematischen Studien schon hinter unsers berühmten D. Wallis Schriften gerathen, und heftete besonders bald meine Aufmerksamkeit auf die Reihen, durch deren Interpolation er die Fläche des Kreises, und Flächen der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten darstellt. Ohne Mühe ward mir einleuchtend, daß, insoferne eine Reihe von Curven angenommen wird, welche alle eine gemeinschaftliche Axe = x hätten, deren Ordinaten aber so fortliefen:

$$\overset{1.}{(1-xx)^{\frac{0}{2}}};\quad \overset{2.}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}};\quad \overset{3.}{(1-xx)^{\frac{2}{2}}};\quad \overset{4.}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\overset{5.}{(1-xx)^{\frac{4}{2}}};\quad \overset{6.}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}};\quad \overset{7.}{(1-xx)^{\frac{6}{2}}};\quad \ldots\ldots$$

von welchen (Curven) die mit der 1sten, mit der 3ten, mit der 5ten, mit der 7ten Ordinate, nach Wallis, folgende ganz quadrirte Flächen haben:

$$= x;\quad [x - \tfrac{1}{3}x^3];\quad [x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5];$$
$$[x - \tfrac{3}{3}x^3 + \tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7];$$

daß, (sage ich,) wenn diese Flächen interpolirt werden könnten, die Flächen der Curven, welche dazwischen liegen, (nämlich die mit der 2ten, der 4ten, der 6ten Ordinate,) ebenfalls dadurch an

den

den Tag kämen, und also insbesondre auch die Fläche für den Kreis, welchem die 2te der angeführten Ordinaten, $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ zukommt. Indem ich nun die Interpolation der vorhandenen Flächen zu Stande zu bringen suchte, so bemerkte ich, daß in allen (d. i. in ihren schon durch x ausgedrükten Werthen) das erste Glied durchgehends

nur x sei;

das 2te aber sich so ändere:

$\frac{0}{3}x^3$; $\frac{1}{3}x^3$; $\frac{2}{3}x^3$; $\frac{3}{3}x^3$; u. s. w.

daß also dabei eine arithmetische Progression der natürlichen Zahlen eintrete; und daß daher die 2 ersten Glieder der zu interpolirenden Reihen so aussehen müßten:

$x - \frac{(\frac{1}{2}x^3)}{3}$ für die Curve mit der zweiten Ordinate $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$

$x - \frac{(\frac{3}{2}x^3)}{3}$ für die Curve mit der vierten Ordinate;

wo das Gesez des Fortgangs schon einleuchtet.

[Nehmlich, das 2te Glied besteht offenbar aus 3 Factoren, von welchen zween $\frac{1}{3}$ und x^3 immer

 eben

eben dieselben sind, der 3te Factor aber ist der Exponent, welchen die jedesmalige Ordinate an sich trägt.]

"Nun kam ich auf die Interpolation der 3ten Glieder. Da bemerkte ich, daß die Nenner der Brüche in den gegebenen Flächen von x oder $\frac{x}{1}$ an, allemal in einer arithmetischen Progression so fort giengen: 1, 3, 5, 7, . . . und daß es also nur noch auf die Erforschung der Zähler in den Coefficienten ankäme. Diese Zähler aber waren offenbar in den Ausdrükken der gegebenen Flächen die einzelnen Ziffern der Potenzen von der Zal 11. Denn

$(11)^0$ giebt 1, und kam in der 1sten Fläche vor.

$(11)^1$ giebt 1, 1; und so heisen die Coefficienten in der 2ten Fläche.

$(11)^2$ giebt 1, 2, 1; und so heisen die Coeff. in der dritten.

$(11)^3$ giebt 1, 3, 3, 1; und so . . in d. 4ten.

$(11)^4$ giebt 1, 4, 6, 4, 1; u. so . . in d. 5ten.

Nun warf ich mir die Frage auf: "Wie könnten wol, wenn die 2 erste Figuren, oder die 2 erste Zäler der Coefficienten in diesen Reihen gegeben sind,

sind. auf eine allgemeine Weise, die übrige folgende daraus abgeleitet werden?"

Und da fand ich, daß wenn man die 2te Figur allgemein m nennt; (also statt 1; 3; oder 1; 4; allgemein 1; m; schreibt,) die folgende Figuren oder Zäler sich vermittelst Multiplication also aussehender Factoren ergeben:

$$\frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \text{ u. s. f.}$$

Zum Beispiel, wenn $m = 4$ bedeutete; und nach den Figuren, die nach 1; 4; folgten, gefragt würde, so fände man zuerst die 3te Figur so:

$$\frac{m-0}{1} \cdot \frac{m-1}{2} = \frac{4-0}{1} \cdot \frac{4-1}{2}; \text{ d. i. } [4 \cdot \tfrac{3}{2}] \text{ oder } 6.$$

alsdenn die 4te Figur, indem man blos $\frac{m-2}{3}$ mit dem schon gefundenen Product der 2 ersten Factoren multiplicirte:

$$\frac{4-0}{1} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4-2}{3} = [6 \cdot \tfrac{2}{3}] \text{ d. i. } 4.$$

Alsdenn die 5te Figur auf gleichförmige Art:

$$4 \cdot \left(\frac{m-3}{4}\right); \text{ hier } 4 \cdot \tfrac{1}{4} \text{ giebt } = 1.$$

Die 6te ist gar nicht vorhanden. Die Reihe bricht darum dabei ab, weil m — 4 soviel als 4 — 4 bedeutete, und also das Product zu o würde.

"Und nun wandte ich die Regel bei der so genug ersichtlichen Gesezlichkeit, auch auf gebrochene Zalen zu Fortsezzung der Interpolation an; und dachte bei den zwei gefundenen ersten Gliedern für den Kreis: $x - \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot x^3)$

den Coefficienten: $\frac{1}{2} = \frac{m - 0}{1}$ oder = m;

schloß folglich: der Coeffic. zu dem nächstfolgenden Glied müsse heisen:

$\frac{m - 0}{1} \cdot \frac{(m - 1)}{2}$ hier $\frac{1}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2} - 1)}{2}$; d.i. $= -\frac{1}{8}$

und also die Reihe bis in das 3te Glied;

$$x - \frac{(\frac{1}{2} \cdot x^3)}{3} - \frac{(\frac{1}{8} \cdot x^5)}{5}$$

Daraus ergab sich nun die Fortsetzung leicht. Es kam jezt das vorhergehende Product,

durch $\frac{m - 2}{3}$ od. $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} - 2)$ d.i. durch $-\frac{3}{6}$

multiplicirt, welches $(-\frac{1}{8}) \cdot (-\frac{1}{2})$ oder $+\frac{1}{16}$ gab.

Und

Und damit hatte ich die Reihe bis aufs 4te Glied:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^5}{3} - \frac{\frac{1}{8}\cdot x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}\cdot x^7}{7}$$

Das 5te und 6te fand sich auf ähnliche Weise. Hieraus ersah ich demnach, daß das verlangte Flächenstük des Kreises für den gegebenen Sinus x (als Ordinate betrachtet,) allerdings durch die Reihe sich ausdrükken lasse:

$$x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{40}x^3 - \ldots$$

welche ich mitgetheilt habe.

Auf eben diese Weise gelangte ich zu dem Flächen-Inhalt anderer Curven, z. B. der Hyperbel. — —

Und damit habe ich die Bahn nun angegeben, auf der ich zu der Ausspähung des binomischen Theorems gelangt bin. In der That wäre mir dieser Umweg wol ganz aus dem Gedächtnis entfallen, wenn mich nicht einige Blikke, die ich vor wenigen Wochen in etliche meiner ältern Scripturen warf, darauf zurükgebracht hätte.

Da ich nun einmal so weit war, so kam ich alsdenn natürlich leicht auf den Gedanken, daß sich die Glieder der oben (S. 14.) angeführten Hauptreihe, das erste, das dritte, das fünfte, ... nehmlich

$$(1 - xx)^{\frac{0}{2}};\ (1 - xx)^{\frac{2}{2}};\ (1 - xx)^{\frac{4}{2}}; \ldots$$

oder ihre Aequivalente:

$$1;\ 1 - xx;\ 1 - 2xx + x^4; \ldots$$

auf eben die Art für sich interpoliren liessen, wie die Flächen, welche von ihnen erzeugt würden, und daß hiezu blos die Weglassung der Nenner, 1, 3, 5, 7, ... nöthig sei; d. i. ich sahe ein, daß, wenn allgemein eine Gröse, wie $(1 - xx)^m$, vorgelegt würde, die Coefficienten der Glieder, schlechthin durch Multiplication der Factoren

$$m \cdot \frac{(m - 1)}{2} \cdot \frac{(m - 2)}{3} \text{ u. s. f.}$$

allemal hervorgehen müßten, m möchte eine gebrochene, oder eine ganze Zal seyn.

Unter mehrern Beispielen in der Anwendung, stehen hier zur Genüge nur diese:

$$(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$$

$(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ ist $= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ u. s. f.

$(1 - xx)^{\frac{1}{3}}$ ist $= 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ u. s. f.

Auf diese Art kam ich zu der Kunst, binomische Grösen mit gebrochenen Exponenten in Reihen aufzulösen, ehe ich noch wußte, daß damit in der That Wurzeln ausgezogen würden. Aber lange konnte mir nun freilich nicht weiter verborgen bleiben, daß dem so sei. Denn ich multiplicirte nur einmal die erste Reihe mit sich selbst, und erhielt das Product: $(1 - xx)$; d. i. das Quadrat von $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$; (natürlich in Näherung schärfer und immer schärfer, jemehr ich Glieder zu multipliciren wählte.)

Alsdenn nahm ich eine doppelte Multiplication mit der zweiten Reihe vor, und gelangte auch damit zur gewünschten Probe. Nun gab es noch mehrere Wege zur Bestätigung. . . .

Als ich dieß alles nun einsahe, legte ich die Interpolation der Reihen ganz beiseite, und bildete das binomische Theorem für sich aus.

Hierauf schritt ich auch zu der Auflösung von Gleichungen, in welchen die unbekannte Gröse in

mehreren Potenzen vorkömmt, und auch diese gelang mir durch Reihen.

Alsdenn verfuhr ich regressiv, und suchte aus den Ausdrükken für Flächen und Bögen die für Ordinaten und Abscissen; und auch diese Arbeiten giengen mir nach Wunsch von statten. Aber um die Zeit, da ich eben mit diesen Gegenständen mich beschäftigte, (es war in den Jahren 1665, und 1666.) brach die Pest ins Land; ich ward genöthigt, von hier *) zu entfliehen, und meine Gedanken auf ganz andere Besorgungen zu richten." — —

*) Von Cambridge.

§. 5.

Es mag mit diesem Auszug aus Newtons grosem Briefe für izt genug seyn. Laßt uns die Blikke zurükwerfen, und folgendes daraus vor vielem andern ins Auge fassen:

Newton gelangte nicht auf dem leichtesten Wege zu der Einsicht des über alle Beschreibung wichtigen binomischen Lehrsazzes. Mehrere Mathematiker haben gezeigt, daß sich wohl aus andern Vordersäzzen dazu gelangen lasse. Aber wenn ein lange verstekt- gelegenes Theorem einmal ans Licht gebracht, hin und her gewendet, und ausgebildet vorhanden ist, dann ist es selten

so

so gar schwer, Wege und Mittel ausfindig zu machen, durch welche es wol bequemer hätte ausgespäht werden können. Dergleichen Nacharbeiten bleiben immer verdienstlich, aber sie können der Ehre des ersten Erfinders nichts nehmen, noch dem Werth seines Scharfsinns Abbruch thun. Es mag auch wohl seyn, daß Heinrich Briggs, und Paskal, vor Newton bereits hinter das erwähnte Theorem gekommen sind; (wie verschiedene Litteratoren wol zu zeigen gesucht haben *).) Aber zuverlässig kannte er doch ihre Erfindungen noch nicht, und nahm seinen eigenen Gang, auf dem er ohne fremde Helfer das Ziel erreichte. Dieses zeigt der ganze Zusammenhang seines Benehmens. Auch ist es gewiß, daß weder Briggs noch Paskal, noch andre Mathematiker in die ganze Bildung des binomischen Lehrsazzes gleichsam so hineingesehen, noch dessen rechten Umfang so durchgeschaut haben, wie Newton, und daß er allein die zu demselben gehörige Formeln eigentlich geschikt zu wenden, und auf alle Seiten hin, so zu drehen verstanden hat

*) Z. B. Carl Hutton in einer besondern Abhandl. welche seinen Mathematical - Tables (Lond. 1785.) beigefügt ist.

hat, daß die Anwendungen und Uebertragungen desselben wirklich zu unermeßlichen Nuzzen ausgeschlagen sind. —

Das ist aber allerdings doch hiebei niemals zu miskennen, daß die analytische Erörterungen des vortrefflichen Mathematikers, Johann Wallis, die nächste Veranlassungen zu mehrern Entdekkungen Newtons, und auch insbesondre zu seiner Aufstellung des binomischen Lehrsazzes in gehöriger Allgemeinheit, (wodurch er erst einen entscheidenden Werth erhielt,) waren. Wallis *) war es, der in dem Decennium von 1650 bis 1660. alle Brüche durch ganze Zalen mit negativen Exponenten ausdrükken lehrte, und der diese Umbildung in Kürze, hauptsächlich mittelst Vorlegung folgender Reihe:

$$y^2;\quad y^1;\quad 1;\quad \frac{1}{y};\quad \frac{1}{y^2};\quad \frac{1}{y^3};$$

durch $y^2;\quad y^1;\quad y^0;\quad y^{-1};\quad y^{-2};\quad y^{-3};$

vor-

*) Johann Wallis war Professor zu Oxfort (seit 1649.) und gab im Jahr 1655. seine Arithmeticam infinitor. heraus; im Jahr 1659. aber sein Buch de curvar. rectificatione. Damals war Newton erst ohngefähr 17 Jahr alt.

vorgestellt, den englischen Gelehrten mittheilte, und auch diese Umbildung, als ganz vernünftig und den Zwekken der Analysis gemäs, vollkommen rechtfertigte. Seine Vorschläge mußten angenommen werden; die Vortheile, welche ihre Annahme mit sich führte, leuchtete jedem unbefangenen Gelehrten ein, der nur jemals Betrachtungen über veränderliche Grösen, die bejaht bis auf o abnehmen, und von da auf die entgegengesezte Seite zu negativen übergehen, angestellt hatte. Indessen ist es doch nicht ausgemacht, (läßt sich auch wol nie ganz ausmachen,) wieviel Gebrauch von Wallisens Bemerkungen in der Anwendung gemacht worden wäre, wenn Newton nicht gekommen, seine Erwägungen durchgedacht, und auf den binomischen und andere Lehrsäzze angewendet hätte. —

Es ist freilich gewiß niemand, der nicht Analysis versteht, glaublich, daß eine Vorstellungsart, wie die angeführte, welche beim ersten Anblik auf eine blose Formalität hinauszulauffen scheint, daß nämlich $\frac{1}{y}$ so viel, als y mit einem negativen Exponenten bedeute $= y^{-1}$; und $\frac{1}{y^2} = y^{-2}$, und $y^0 = 1$ gelte; so grosen Einfluß auf eine ganze schon lange cultivirte Scienz gehabt

habt haben sollte! Und eben so wenig ist es einem solchen Unkundigen begreiflich zu machen, daß die Ueberzeugung, eine Wurzelgrösse, $\sqrt[2]{y}$, lasse sich auch $y^{\frac{1}{2}}$ schreiben, und $\sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}$; unübersehlich weit fortgehende Folgerungen haben, und ganze Zweige bisher ungekannter wichtiger Wissenschaften hervorbringen, oder doch gleichsam den Stoß dazu geben könne.

Daß aber dem so sei, daß allerdings die erwähnte Umbildungen auf sehr interessante Schlüsse führen, und Argumentationen erweitern, die einen Theil der Cultur der höhern Mathematik auf Jahrhunderte hinaus bestimmen; das hat doch wirklich Newton gezeigt, und die Wichtigkeit der Folgen, welche sein Benehmen hiebei nach sich führte, kann im Ernst kein Mathematiker mehr in Zweifel ziehen. Anfänger von Geometrie und Arithmetik überzeugt man schlechterdings nicht, daß diese Behauptungen gegründet seien, selbst Gelehrte nicht, welche Geometrie und Arithmetik ohne Algebra nur nach alten Schulbüchern, mit Fleiß gelernt haben; und die Mühe ist verloren, sie durch schöne Declamationen darüber zn belehren. Blos das Studium der höhern Analysis im Zusammenhang, auch wol in Verbin-

dung

dung mit Mechanik, — kann und muß jeden überführen, daß aus der gedachten Umgestaltung der Brüche, Wurzeln und Potenzen, sich so unzählige Vortheile haben schöpfen lassen.

Ohne aber jezt weiter von Grösen mit gebrochenen und verneinten Exponenten zu reden, laßt uns auf die Gesezlichkeit der Coeffcienten, wie sich dieselbe aus Binomien, die in Potenzen mit bejahten ganzen Exponenten erhoben sind, ergiebt, einmal allein unser Augenmerk richten:

§. 6.

Ein Binomium, in die 2te Potenz erhoben; $(a + b)^2$ ist entwikkelt: $a^2 + 2ab + b^2$;

In dieser Potenz kommen also drei Glieder vor; Ihre Coefficienten sind für sich betrachtet: 1, 2, 1.

Ein Binomium in die dritte Potenz erhoben; $(a + b)^3$ ist $= a^3 + 3a^2b + 3abb + b^3$.

wo in der Entwiklung vier Glieder vorkommen. Die Coefficienten derselben sind: 1, 3, 3, 1.

Als-

Alsdenn kommt:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2bb + 4a.b^3 + b^4.$$

wo in den fünf Gliedern die Coefficienten (für sich) genommen: 1, 4, 6, 4, 1 heissen.

Es leuchtet jedem sogleich ein, daß die Glieder nicht nothwendig so gestellt seyn müssen, weder bei der Entwiklung der 2ten Potenz, noch bei der 3ten, und 4ten. Ganz gewiß könnte man

$$(a + b)^3 \text{ auch} = a^3 + b^3 + 3abb + 3a^2b$$

schreiben, wo das lezte Glied jezt sogleich nach dem ersten zu stehen käme; und eben so hätte diese Aenderung der Glieder, soviel ihre Stellung für sich betrifft, auch bei jeder andern Potenz wol statt. Die Grösen selbst verlören damit nichts von ihrem innern Gehalt. Allein zu Erfindung des Gesezzes der binomischen Coefficienten war doch die Wahl dieser Stellung der Glieder gar nicht gleichgültig. Die Glieder mußten allerdings so gestellt werden, daß die Coefficienten

bei der zweiten Potenz nicht etwa als 2, 1, 1, sondern als 1, 2, 1,

die der 3ten nicht etwa 1, 1, 3, 3, sondern als 1, 3, 3, 1, neben einander zu stehen kommen durften.

Ferner

Ferner bei der 4ten Potenz nicht etwa 1, 1, 4, 4, 6, oder 6, 4, 1, 4, 1, sondern bestimmt 1, 4, 6, 4, 1; u. s. f.

Dann nur bei Annahme und Festhaltung dieser angezeigten bestimmten Ordnung, konnte Newton

erstens auf die Wahrnehmung kommen, daß die Ziffern der Coefficienten 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1, u. s. f. eben die Ziffern seien, welche in den Potenzen der Zal 11 ersichtlich sind;

zweitens auf die Wahrnehmung, daß aus dem 2ten Coefficienten sich allgemein die folgenden bestimmen, und durch ihn selbst sich ausdrükken liessen.

Der Werth der erstern Wahrnehmung ist (so viel ich übersehen kann,) weit nicht von dem Belang, wie der Werth der 2ten. Es war ein Behuf des Gedächtnisses, das Newton hiebei zu statten kam; vielleicht nur ein zufälliger Blik in eine Potenzen-Tafel ganzer Zahlen. Es fiel ihm wol ein: das Quadrat von 11 heißt 121; und der Cubus von 11 heißt 1331; diese Ziffern treffen bei den Coefficienten der 2 ersten Potenzen zu; wie? wenn die der nächstfolgenden Potenz

in den Ziffern des Biquadrats zu finden wären? — — Wahrscheinlich warf sich Newton in diesem Ideengang diese Frage auf; und er konnte seine Neugier leicht befriedigen. Die Antwort fiel bejahend aus. Grose Kunst, oder besonders tiefer Scharfsinn ist hiebei nicht vorauszusezzen. Ein glükliches Gedächtnis konnte diese ganze Wahrnehmung (beinahe unwillkührlich) erzeugen. Aber

bei der 2ten ist es billig und gerecht, eine andre Sprache zu führen. Wol viele tausend Menschen, auch wol geschikte Mathematiker, konnten Reihen von Zalen, wie die folgende sind, ansehen, und wieder ansehen:

1, 2, 1,

1, 3, 3, 1,

1, 4, 6, 4, 1,

1, 5, 10, 10, 5, 1,

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1,

ohne sich die Frage aufzuwerfen: Läßt sich wol die Ziffer in der 3ten Stelle aus der Ziffer in der 2ten Stelle nach einem allgemeinen Gesez finden? und alsdenn weiter auch, die in der 4ten, die in

der

der 5ten Stelle, und sofort . . . ebenfalls in den Hauptausdruk der 2ten versezzen?

Und, wenn auch hie und da ein Gelehrter sie sich aufwerfen mochte, ist es wahrscheinlich, (darf man hiebei weiter fragen,) daß das Problem leicht von einem andern, als von Newton, oder einem ihm ähnlichen Kopf, wäre gelößt worden?

Es mag wol verstattet seyn, zuerst indirect hierauf zu antworten: Es hatte nicht leicht ein anderer, der nicht gerade über solche Reihen, wie Wallis aufführt, nachgedacht hätte, das Bedürfniß, dieser allgemeinen Gesezlichkeit der Coefficienten, oder der Structur ihrer Folge nachzuspähen. Nämlich Potenzen mit bejahten ganzen Exponenten zu entwikkeln, die über das Biquadrat hinauf stiegen, — das Geschäft kommt äusserst selten vor; und sei es auch, daß jemand die Coefficienten der sechsten und 7ten Potenzen und ihre Ordnungen deutlich vor sich zu sehen Verlangen getragen hätte; er konnte dieses Verlangen durch eine leichte Arbeit, blos mit Anwendung einer kurzen Zalen-Rechnung sich befriedigen; und brauchte dazu keiner Buchstabenrechnung. Auch mußte beinahe jedem, der nur etwa die Coefficienten, wie sie auf der vorhergehenden

Seite unter einander gestellt sind, etwas aufmerksam ansahe, einfallen:

1) Die in der 2ten Stelle sind vertical genommen die natürlichen Zalen 2, 3, 4, 5, ... bei welchen sich gar nicht im Fortgang fehlen läßt;

2) Die Coeffic. in der 3ten Stelle, wenn sie ebenfalls vertical genommen werden, geben eine äusserst leicht zu findende Differenzreihe. Denn wer sieht nicht, daß

zu	1	3	6	10	15
die Differenzen:		2	3	4	5

gehören? — Also 15 + 6 muß den nächsten dritten Coeffic. geben! Auch die Coeffic. in der 4ten Stelle gehen durch Betrachtung der schon vorhandenen in der 4ten Verdicalreihe gar leicht hervor.

Allein, wenn auch jemand diese Folge für jede Potenz mit ganzen (ungebrochenen) Exponenten einsahe, so ward doch damit noch wenig für Analysis ausgerichtet, und ein Fund von der Art lief am Ende fast auf weiter nichts, als auf einige mathematische Belustigungen hinaus.

aus. Mit dergleichen hatten sich im vorigen Jahrhundert (auch schon im 16ten) mehrere Arithmetiker oft abgegeben; ihre Spiele haben aber nur selten zu einigem Gebrauch angewendet werden können.

Natürlich konnten demnach doch wol wenige Analytiker den Beruf in sich fühlen, Formeln nachzusinnen, wie sich die Coefficienten entwikkelter Potenzen bei ganzen Zahlen aus den 2 ersten wol ableiten liessen. Die bald abbrechenden Reihen (denn bei Potenzen mit ganzen Exponenten sind alle Reihen endlich, und die hintern Glieder allemal zugleich mit den vordern entdekt, weil sie ihnen gleich sind,) reizten sie gar nicht, den Gesezzen des Fortgangs im horizontalen Lauf der Glieder nachzuspähen, sie konnten schwerlich einsehen, wie ihnen die Mühe einer auch etwa gelingenden Entdekkung vergolten werden dürfte.

Aber Newton hatte ein ganz anders, gar viel grösseres, Bedürfnis, sobald er nur einmal den Gedanken faßte: „Wie, wenn sich Potenzen „mit gebrochenen Exponenten in Glieder entwikkeln liessen?“

Er dachte wahrscheinlich darüber nach: $(a + b)^m$ oder auch $(1 - xx)^m$ ist doch wol allemal etwas, der Exponent mag eine Gröse seyn, welche sie will, etwas, das in einer Folge von Gliedern evolvirt stehen, oder dem eine gewisse Folge gereiht-stehender Glieder correspondiren muß. Warum sollte die Reihe blos, wenn m eine ganze Zal ist, statt haben?

Er nahm wahr, daß bei

$(a + b)^2$, der 2te Coeffic. 2 heisse;

bei $(a + b)^3$, der 2te Coeffic. 3; und so fort; schloß also, daß

bei $(a + b)^m$ der 2te Coefficient m seyn müsse;

und konnte für bejahte ganze Exponenten mit vollkommenster Sicherheit dieses schliessen, und ganz sicher behaupten: "Die Gröse des 2ten Coefficienten m sei ein Correlatum zu der Potenz $(a + b)^m$ oder $(1 - xx)^m$."

Daß der erste Coeff. durchgehends = 1 heisse, sahe er ebenfalls, ohne Ausnahme. Also kam ihm der Gedanke auf dieses hin wol ziemlich nahe: "Der 3te Coefficient dürfte sich doch wol „aus dem Exponenten der Potenz, welcher die nehm-

„nehmliche Ziffer mit dem 2ten Coeffic. hat, „(aus m) bestimmen lassen. Weißt dieser Ex„ponent auf den 2ten Coefficienten hin, so kann „er auch wol auf den 3ten hinweisen, vielleicht „wol mit einiger Aenderung, doch so, daß er noch „Anzeiger bliebe, daß er den dritten noch ver„riethe. . . . Und wenn dem so wåre, so dürfte „dieses warscheinlich statt haben, der Exponent „möchte eine ganze, oder er möchte eine ge„brochene Zal seyn; m ist ja ein allgemeiner „Ausdruk. Geht es doch sonst in Algebra an, „den allgemeinen Signaturen Brüche zu unter„legen, und man gelangt ja eben dadurch zu „allgemeinen Schlüssen, und zur Einsicht weit „umfassender Gesezlichkeiten." . . .

Dergleichen Gedanken oder geheime Raisonnements giengen wahrscheinlich in Newton vor. Genau die Ordnung anzugeben, in der sie auf einander folgten, vermåg allerdings niemand; wer kann in des andern Seele lesen? — Und ich möchte mich gewiß am wenigsten erdreisten, über Newtons Ideen-Associationen entscheidend zu sprechen. Genug, Vorbereitungen mußten doch vorhanden seyn, um Hand ans Werk zu legen, um die Folge der Coefficienten heraus zu bringen; und Newton giebt selbst, obwol kurz an,

daß vorbereitende Betrachtungen ihn geleitet haben. — —

Zu der Erfindung der Ableitung des 3ten Coefficienten aber aus dem 2ten, (auf welche alles ankam,) kann er fast nicht anders, als durch empirische Versuche gelanget seyn, indem er nehmlich etliche Coefficienten von etlichen entwikkelten Potenzen für sich hinlegte, sie wiederholt ansahe, z. B. nur die drei vordern zuerst:

1, 3, 3, . .; 1, 4, 6, . .;

alsdann untersezte: 1, m, . . .; 1, m, . . .;

und hierauf sich Fragen, etwa wie folgende, aufwarf: "Mag wol die nächstfolgende Gröse hinter m so heissen? oder so? . . . und wie kanns angehen?" — Da kam er dann darauf, daß er sich selbst antworten mußte: "Es geht an, wenn man

$$1;\ m;\ \left[\frac{m.(m-1)}{2}\right];$$

schreibt. Denn es ist doch gewiß, daß die 3ten Glieder alle zu der Formel passen:

$$\frac{3.(3-1)}{2}=3;\ \frac{4.(4-1)}{2}=6;\ \frac{5.(5-1)}{2}=10;$$

und

und demnach trifft die Formel doch schon bei 3 Potenzen zu." Die Ueberzeugung war gar leicht durch Induction zu erhalten, daß sie bei allen Potenzen mit bejahten ganzen Exponenten zutreffen müsse.

Natürlich gieng Newton nunmehr zu dem 4ten Exponenten über, und versuchte dessen Bildung, auf gleichförmige Art durch Zusammensezzung von Factoren. "Der 3te Coefficient be„steht aus zwei Factoren; der 4te dürfte wol „aus drei bestehen; der 3te ergab sich, wenn „man

$$m \text{ mit } \frac{m-1}{2} \text{ multiplicirte;}$$

„der 4te dürfte sich doch wol ergeben, wenn man „den dritten Factor: $\frac{m-2}{3}$ annähme, und „mit den zwei vorstehenden multiplicirte. Die „Folge scheint in Beziehung auf den zweiten „Factor die natürlichste. Der Versuch und die „Probe dazu ist bald gemacht."

So ohngefär sprach wol Newton zu sich selbst, und sezte hin:

$$1;\ m;\ \left[m \cdot \frac{(m-1)}{2}\right];\ \left[m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{(m-2)}{3}\right];$$

 legte

legte alsdenn Zalen in Concreto unter; und fand natürlich die Vermutung seines Wizzes bestätiget. Und von da an, war an der Bestimmung der nächstfolgenden Coefficienten fast gar nicht mehr zu zweifeln. Das Gesez des Fortgangs leuchtete jezt in die Augen; der fünfte Coefficient, mußte nach der Analogie der Structur des 2ten und 3ten heissen:

$$\left[m.\frac{(m-1)}{2}.\frac{(m-2)}{3}.\frac{(m-3)}{4}\right]$$

Die Proben darüber konnten nicht fehlen.

Und nun trat das grose Theorem ans Licht. Es war, sichern Anzeigen nach, wol gegründet; wenigstens konnte ganz kein Zweifel dagegen mehr gültig seyn, insoferne blos von Potenzen mit ganzen (ungebrochenen) Exponenten die Rede war. Aber ob die allgemeine Formel (durch m ausgedrükt,) auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten durchgehends wol anwendbar seyn werde, — dagegen konnten dennoch noch Zweifel vorwalten. Es dürfte nicht überflüssig seyn, sich doch etwas hiebei aufzuhalten.

§. 7.

§. 7.

Bei ganzen Exponenten steigen die Coefficienten so oft eine Potenz entwikkelt, und in Glieder ausgesezt wird, allemal bis auf einen gewissen Grad, alsdenn nehmen sie wieder ab; und fallen, wie sie gestiegen sind; z. B. bei der 7ten Potenz heissen sie:

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1,

und bei der 8ten Potenz:

1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,

Newton mußte bald einsehen, daß wenn der Exponent m einen willkührlichen (ächten) Bruch in Concreto bedeutete, niemals ein solcher höchster Mittelpunkt bei den nach der Formel eintretenden Coefficienten möglich sei, sondern daß vielmehr da die Coefficienten in allen Gliedern nach dem 2ten fallen, und immer mehr fallen müßten. Die bekannte Regel:

„Producte aus Factoren, die Brüche sind,
„sind allemal Grösen von geringerem Ge-
„halt, als die Factoren selbst,"

mußte ihn sogleich überzeugen, daß bei m = $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$, an kein Steigen und Fallen der aus

$$m; \left[\frac{m.(m-1)}{2}\right]; \left[m.\frac{(m-1)}{2}.\frac{(m-2)}{3}\right];$$

gebildeten Producten, zu denken sei.

Diese sichtbare Verschiedenheit des Fortgangs konnte ihm also schon einen Zweifel erregen, ob auch das Theorem wol sicher allgemein, auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten, anwendbar seyn dürfte.

Ein zweiter Zweifel mochte hiernächst sich, durch folgende Betrachtung veranlaßt, an den ersten sehr bald anschliessen:

$(a + b)^2$; giebt ausgesezt drei Glieder.

$(a + b)^3$; giebt ausgesezt vier Glieder.

$(a + b)^m$; giebt ausgesezt $m + 1$ Glieder.

Die lezte Behauptung ist einleuchtend. Die Glieder brechen mit dem $m + 1$ten Glied ab, und die Reihe hat ein Ende. Dabei hat also eine sichre zuverlässige Gesezlichkeit statt. Aber, wo bleibt diese Gesezlichkeit, wenn m einen Bruch bedeutet? $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{5}$; oder $\frac{1}{n}$ oder $\frac{d}{n}$? Nach der Analogie zu schliessen, sollte bei $m = \frac{1}{n}$ doch wol

$(a + b)^{\frac{1}{n}}$

$(a+b)^{\frac{1}{n}}$; die ausgesezte Reihe $\frac{1}{n}+1$ Glieder haben; aber diese Potenz mit einem gebrochenen Exponenten hat unendlich viele Glieder; die Reihe derselben läuft fort, und bricht nirgends ab. Also ist damit die allgemeine Gesezlichkeit gestört, indem ja

$$\left(\frac{1}{n}+1\right) \text{ oder } \left(\frac{1+n}{n}\right);\ \text{z. B. } \frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}.$$

gewiß eine endliche Gröse ist, und die Reihe der Glieder doch unendlich ist.

So konnte allerdings auch dieser 2te Zweifel Newton beunruhigen, und die Sicherheit der Behauptung untergraben: daß das Theorem, die Binomial-Coefficienten betreffend, eine allgemeine Ausdehnung habe, was auch der Exponent der Potenz für eine Gröse seyn möge.

Newton giebt nirgends, (weder in diesem Brief, noch, soviel mir bekannt ist, anderswo) zu erkennen, in wie ferne, oder wie lange ihn diese Zweifel aufgehalten haben, noch wie sie wol zu lösen seien. Andre Gelehrte nach ihm haben sich angelegen seyn lassen, sie zu beseitigen, und die Gründe auseinander zu sezzen, aus denen sich die

die Ausdehnuug des Theorems auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten rechtfertigen lasse *).

Die meisten Mathematiker haben sich aber (wie es mir scheint,) in dieser Sache mit Induction beruhigt, da unzälige Proben die Zulässigkeit und Richtigkeit der erwähnten Ausdehnung bezeugen, und noch kein Mensch aufgetreten ist, der durch eine widrige Instanz die Universalität dieser Induction anzufechten vermögend gewesen wäre, da man auch bei den in viel tausend Rüksichten wiederholten Anwendungen, welche die Allgemeinheit des Theorems voraussezzen, noch niemals auf einen Widerspruch gestosen ist.

Jede Wurzel-Ausziehung bewährt auch schon diese Induction, noch ohne Rücksicht auf Geometrie: indem sich ja die Wurzel jeder Gröse,

z. B. $\sqrt[2]{30}$; als $\sqrt[2]{(36-6)} = (36-6)^{\frac{1}{2}}$ in Reihen mit Brüchen, dem Newton. Theorem gemäs,

und

*) Unter diesen zeigneten sich Clairaut, Euler, und neuerlich Kästner, Klügel, und Michelsen aus.

und auch als $\sqrt[2]{}(30,000000\ldots)$ in Decimalen

so weit man die Näherung nur treiben will, auflösen läßt, und jene Reihen-Brüche, (in Decimalbrüche verwandelt, und dann einzeln addirt,) sicher eben das Resultat geben, welches man durch die gewöhnliche Operation erhält, nach der nehmlich

$$\sqrt[2]{30,000000\ldots} = 5,477225\ldots$$

beträgt. Die Reihe aber selbst beginnt mit folgenden Grösen:

$$\sqrt[2]{30} = 6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4.6} - \frac{1.3}{2.4.6.(6)^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.(6)^3}$$

welche man, so weit man Lust hat, fortsezzen kann. Diese betragen [6 — 0,5227..] d. i. 5,4772..

Man stelle gleichförmige Versuche mit Cubikwurzel-Ausziehungen, u. a. m. an. Der Erfolg wird jedesmal das binomische Theorem, und dessen sichre Anwendung bewähren.

§. 8.

Newton gab sich diese Bewährung, (wenn man dem Gang seines Vortrags genau nachgeht,) zuerst

zuerst, wol zwar ebenfalls arithmetisch, aber doch sogleich in Beziehung auf geometrische Quadraturen, und warscheinlich unmittelbar nach der Erfindung des großen Theorems, ohne Aufenthalt in Beziehung auf die Quadratur des Kreises. Er kannte nehmlich zuverlässig bereits des bekannten Ludolphs von Cölln, und andrer Mathematiker Bemühungen, die Fläche des Kreises durch Näherungszalen auszudrükken. Er wußte, daß der Fläche des Quadranten, wenn ein Kreis mit $r = 1$ angenommen wird, die richtigen Decimalen

$$0{,}785398163\ldots \quad \text{(näherungsweise)}$$

zukämen; kannte auch von mehrern kleinern Flächenstükken die Gehalte in solchen Näherungszalen, die immer, um Bestätigungen seiner Reihen anzustellen, hinlänglich weit reichend waren. Wenn er nun die Absciſſe $x = r$ oder 1 sezte, so ward ihm natürlich aus der Reihe, welche die Fläche unter dem Kreisbogen von 90 Graden ausdrükte, nehmlich aus

$$x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{40}x^5 - \tfrac{1}{112}x^7 - \tfrac{5}{1152}x^9$$

folgende: $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} -$

und die Summe dieser Brüche (nach 1,) in Decimalen

cimalen ausgedrükkt, gab ihm einen Subtrahenden: 0,214 . . oder wenn er die Brüche auf etliche Glieder weiter fortsezzte, zu schärferem Gebrauch: 0,214601836 . .; wodurch beim wirklichen Abzug,

[1 — 0,214601836 . .] = 0,785398163 . .

hervorgieng. Damit hatte er eine Probe gemacht!

Für jede andre Fläche unter einem kleinern Kreisbogen konnte er ähnliche Reihen aufstellen, und die angeführte Formeln prüfen, wobei freilich die Rechnungen wegen der Potenzen von x, die in jedem Glied der Reihe als Factoren vorkamen, viel beschwerlicher ausfallen mußten, weil nur bei der Annahme eines Quadranten, x = 1 gelten konnte, (wenn anders der Halbmesser des Kreises = 1 angenommen wurde,) und in jedem andern Fall die Potenzen x, x^3, x^5 . . . sehr aufhaltende Multiplicationen durchgehends veranlaßten.

Die Mittel, durch besondere Kunstgriffe den Calkül zu erleichtern, Glieder zusammen zu ziehen, umzubilden, u. d. m. kamen nachher; davon ist jezt nicht sogleich die Rede.

Unsre gegenwärtige Betrachtung geht blos allgemein auf die Prüfung der Reihen für Kreisflächen und Bögen, welche Newton allerdings anstellen mußte, auch sicher angestellt hat, höchst wahrscheinlich auf mehr, als nur auf eine Weise. Ich habe hier zu einigem Beleg der vorhergehenden Behauptungen einstweilen nur eine vortragen wollen.

Aber ich moechte nicht zu lange bei diesem Beruhigungsmittel durch solche Beweise a posteriori verweilen. Ein Analytiker, wie Newton, bedurfte derselben kaum, um sich der Richtigkeit seiner grosen Erfindung, und der Haltbarkeit der aufgestellten Reihen für den Kreis zu versichern. Analogie leitete ihn, zwar (daß ich so rede) über noch ungebahnte Wege, aber doch Schritt für Schritt, so daß er immer den nächsten Weg zum Fortgang wol vor sich sahe, und nicht mit schwankenden Tritten im Dunkel irrte. Wallis Reihen, und die Interpolationen seiner Formeln erzeugten diese Analogie. Dabei mit nähern Betrachtungen zu verweilen, wird hier nicht der unrechte Ort seyn.

§. 9.

§. 9.

Es war Newton schon laengst bekannt, daß zur Quadratur irgend einer Fläche unter jeder Curve, (die als quadrabel angenommeu werden möchte) die Gleichung der Ordinate, durch ihre zugehörige Abscisse ausgedrükkt, erforderlich sei. Die Quadratur der Apollonischen Parabel, und die anderer Curven, welche Wallis aufstellte, zeugten hievon. Die gedachte Ordinaten-Gleichung mußte allemal als der eine Factor des Products vorkommen, welches in Rechnung die Fläche unter der Curve, (von welcher die Frage war,) ausgab.

Dieser eine Factor mußte, in Beziehung hierauf, notwendig beim Zirkel,

$$\sqrt{(1 - xx)}, \text{ oder } (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$$

heissen, insofern ein Kreis mit dem Halbmesser $r = 1$, und die Abscissen vom Mittelpunkt des Kreises (nicht vom Scheitel, oder von der Peripherie ausgenommen wurden. Denn offenbar ist doch das Quadrat des Perpendikels MP, in der beigefügten Zeichnung, oder das Quadrat der Ordinate im Kreis,

$$= [AP \cdot PB] = (1-x) \cdot (1+x) \text{ d. i.} = 1 - xx$$

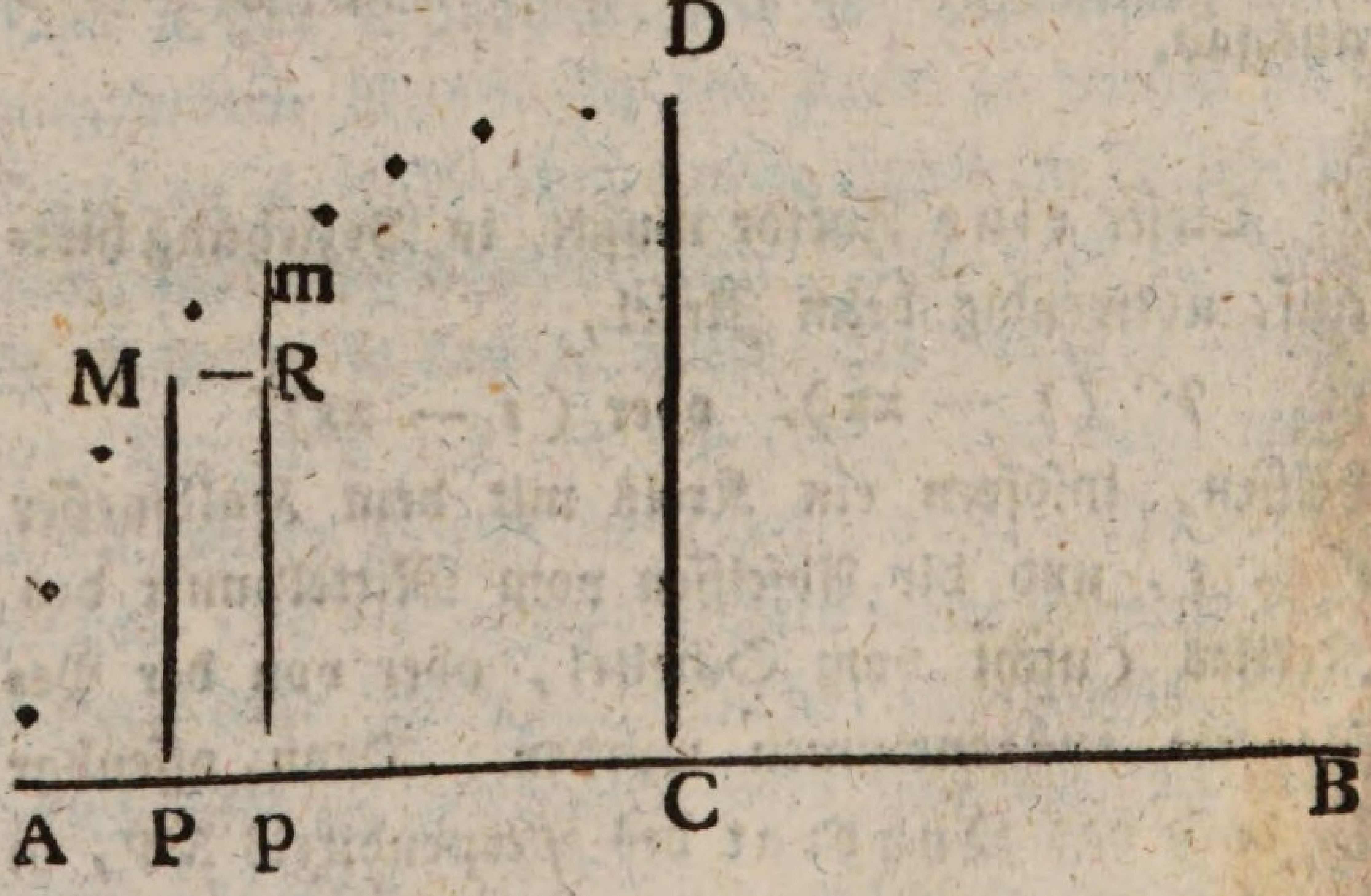
indem ja

AP = [AC—PC], oder 1—x bedeutet, und PB — [BC+PC] so viel, als 1+x gilt.

Die Seite des Quadrats, d. i. $\sqrt{MP^2}$, mus also natürlich

$$= \sqrt[2]{(1-xx)} \text{ oder } (1-xx)^{\frac{1}{2}}$$

heissen. Und damit ist der Ausdrukk jeder Ordinate im Kreis durch die Abscisse gegeben; weil MP bis A abnehmen, und bis DC wachsen kann, ohne daß die Gleichung selbst sich änderte; folglich ist auch der gedachte e i n e F a c t o r zur verlangten Quadratur damit vorhanden und immer ebenderselbe.



Liesse sich nun dieser Factor mit einem gebrochenen Exponenten zu einer v e r s t ä n d l i c h e n Groese umbilden, so war alsdenn blos vollends

die

die Berichtigung des andern Factors, (der wol auch aus mehrern zusammengesezzt seyn konnte,) nöthig, um das Product zu haben, dessen Betrag die Fläche unter der Curve, auf die alles Absehen gieng, in Rechnung ausgeben sollte.

Die Berichtigung des leztern Factors lernte Newton von Wallis; die Berichtigung des erstern — von und durch sich selbst, vermittelst des ausgespähten binomischen Lehrsazzes.

Was er immer von Wallis lernte, kann hier nicht umständlich ausgeführt werden, lief aber im Wesentlichen auf folgende Grundvorstellungen hinaus:

Um die Flaeche, MDCP, zu quadriren, in welcher MD das Stükk einer Curve, hier in der Zeichnung eines Kreisbogens, ist, mus man sie in unendlich-viel kleine Rechtekke eingetheilt sich vorstellen, wie MPRp eines ist, oder auch in eben so viel Trapezien, wie MPmp eines ist, mus aber dabei die Paralelen MP und mp so ganz nahe aneinander hingestellt denken, daß das kleine Dreiekkchen MRm, welches in der Figur die Differenz zwischen einem solchen Trapezium und Rechtekk darstellt, für gar nichts mehr zu achten seyn kann, insoferne schon die Fläche des Rechtekks

ekks MPRp, die doch viel grösser als das Dreiekkchen ist, wegen der Nähe der Paralelen, als unendlich klein angenommen wird. Der erstgedachten Nähe wegen wird das Stükkchen der Curve, Mm, zur geraden Linie, und ist unendlich-klein zu denken; (*) ebenso Pp, das Stükkchen der Absciſſe, das blos, um der Bequemlichkeit des Sehens zu statten zu kommen, in der Figur eine noch wohl bemerkliche Weite hat. Nun denke man sich eine Summe von solchen Rechtekken oder Trapezien von MP bis DC, so ist wohl der nächste Gedanke, daß wenn die Summation dieser unendlich-kleinen Flächen ausfindig gemacht werden könnte, d. i. wenn der Betrag derselben in einem bekannten Maas ausgesprochen werden könnte, eben damit die verlangte Quadratur der ganzen Fläche, MDCP, ins Reine gebracht und ganz vollendet seyn würde.

Der

(*) Als gerade Linie ist Mm die Hypotenuse in dem kleinen rechtwinklichten Dreiekkchen MRm, und daher wird auch $Mm = \sqrt{[Mr^2 + MR^2]}$ gedacht; d. i. $= \sqrt{[dy^2 + dx^2]}$, und so drükkt man auch das unendlich kleine Bogenstükkchen, oder das Differential der Curve, dAM, im höhern Calkül aus. Davon wird unten mehr vorkommen.

Der allgemeine Ausdrukk eines solchen unendlich kleinen Rechtekks ist = y . dx; oder y . $\dot{x}$; wo

y die Ordinate MP bedeutet;

dx aber oder $\dot{x}$, die Aenderung der Abscisse in einer unendlich-kleinen Zeit und durch einen unendlich kleinen Raum, Pp.

So, wie nun jede Fläche eines Rechtekks in Rechnung zween Factoren haben mus, so mus auch jedes der erwähnten unendlich-kleinen Rechtekke zween dergleichen haben, deren allgemeiner Ausdrukk nun aber nicht anders, als y . dx oder y . $\dot{x}$, wol heissen kann, obgleich die Signaturen willkührlich sind, durch die man die bemelte Modification und Aendrung der Abscisse dem Auge darzustellen für gut findet, so wie auch die Kunstwörter, mit denen man

d x, das Differential der Abscisse x, nach Leibniz, und auch $\dot{x}$, als die Fluxion von x, nach Newton

benennet. Wallis bediente sich beeder Ausdrükke vor dem Jahr 1676. (so viel ich weis) noch gar nicht. Aber, daß es bei jeder verlangten Quadratur irgend einer Fläche unter Curven doch allemal auf eine Summation unendlich-kleiner Flächen, wie y dx in Kürze bedeutet, ankomme, das wußte

er gar wol. Ueberdieß sah er dazu ein, daß, um die Quadratur zu Stande zu bringen, die Ordinate y allemal durch eine gewisse Reduction der Abscisse gleichartig gemacht, d. h. in den Ausdrukk der Abscisse versezt werden müsse, und daß man mit etwas, das etwa wie ydx, oder y . $\dot{x}$ aussähe, sich wenig fördere, zum Ziel zugelangen, sondern daß z. B. beim Kreis, ein Product, wie

$$(1 = xx)^{\frac{1}{2}} dx; \text{ oder } (1 - xx)^{\frac{1}{2}} \dot{x};$$

erforderlich sei, und es dann blos auf eine sichre Summation solcher Producte ankäme, um die bezwekkte Quadratur zu vollenden, oder um mit den Worten der nachfolgenden Mathematiker zu sprechen, blos auf das Integral des angegebenen Products, welches allgemein

$$\int (1 - xx)^{\frac{1}{2}} . dx$$

geschrieben wird. Die Evolution eines solchen Integrals vorzunehmen, welches 2 Factoren unter sich begreift, deren einer eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten war, — die Kunst besaß Wallis noch nicht; wol aber die, Integrale von Producten folgender Form und Zusammensezzung herauszubringen:

$$\int (1 - xx)^{1} . dx; \int (1 - xx)^{2} . dx$$

und überhaupt alle, die nur Potenzen mit bejahten ganzen Exponenten, als Factoren, enthielten,

ob

ob ihm gleich die erst nachher erfundene Regeln, Integrationen kurz vorzunehmen noch fehlten, und seine Sprache von der der neuern abgieng. Er wußte, und gab deutlich an:

die Summation von $(1 - xx)^1\ dx$; oder
$\int (1 - xx)^1\ dx$ sei $= [x - \frac{1}{3} x^3]$
und die Summ. von $(1 - xx)^2 dx$; od. $\int [1 - xx)^2\ dx$
sei $[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5]$.

Den Beweis hievon giebt man sich nach den Ausdrükken der Neuern in wenigen Zeilen; und ich will denselben doch sogleich beisezzen:

Das Integral einer Gröse,
wie $b \,.\, x^{m-1}\ dx$ geformt, oder $\int b \,.\, x^{m-1}\ dx$
ist ausgemacht (*) $= b \,.\, \frac{1}{m} \,.\, x^m$

(*) Um einzusehen, wie dieses ausgemacht sei, mus man zuvörderst überzeugt seyn, daß allgemein $\int n \,.\, x^{n-1}\ dx = x^n$ gelte. Und um sich hievon zu überzeugen, mus man verstehen, wie sich die Differential-Gleichung für $\frac{1}{v^1}$ oder $d\,(v^{-1})$ ergebe, welche nehmlich $= [-1 \,.\, v^{-1-1}\ dv]$ heißt;

Wird nun xx dx so geschrieben:

$1 . x^2 . dx$, oder $1 . x^{3-1} dx$;

und darunter gesezzt: $b . x^{m-1} dx$;

so sieht man unmittelbar ein, daß das Integrat hievon, oder $\int 1 . x^2 dx$ so viel, als $1 . \frac{1}{3} x^3 = \frac{x^3}{3}$ seyn müsse. Da sich nun, daß

$\int (1 - xx)^1 dx = \int (1 . dx - xx\, dx)$ sei,

wenn man wirklich multiplicirt, gewiß leicht denken läßt, so kommt nun ohne Schwürigkeit, in so ferne die Integration einzeln mit 1 . dx, und dann mit xxdx vorgenommen wird, die von Wallis angeführten Differenz-Grösse $[x - \frac{1}{3} x^3]$ zum Vorschein.

Ganz nach gleicher Methode ergiebt es sich, daß das Integrat von $(1 - xx)^2 . dx$, oder

$\int (1 - xx)^2 dx$ soviel als $[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5]$

sei. Denn man sezze nur $(1 - xx^2)$ aus, und multiplicire alsdann mit dx in die entwikkelte (drei)

---

heißt; und wahr bleibt, auch wenn gleich x nicht verneint, sondern bejaht ist. Damit fällt in die Augen, daß ich sehr weit zurükzugehen nöthig hätte, wenn ich alle Vordersäzze deutlich auseinander zu sezzen mir vornehmen wollte, auf deren Erläuterung die Integration von $(1 - xx)$ dx beruht.

(drei) Glieder dieser Potenz, so erhält man vor sich:

$$\int (1 . dx - 2 xx . dx + x^4 dx)$$

Hierauf integrire man Glied für Glied, so trit unleugbar die erwähnte Gröse hervor:

$$[x - \tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5]$$

In diesen Fällen nun, (auch den dazu genommen, da die Ordinate $(1 - xx)^{\frac{0}{2}}$ gesezzt wird, d. i. = 1 gilt, welchen ich der Leichtigkeit wegen auf den nächstvorhergehenden Blättern übergangen habe,) giebt offenbar die Integration vollendete Quadraturen von Flächen, welche durch Curven und durch gerade Linien zugleich umschlossen sind; aber diese Quadraturen gehen den Kreis nichts an. Die Factoren zu dx sind durchgehends Potenzen mit bejahten und ganzen Exponenten, nehmlich

$$\int (1 - xx)^{\frac{0}{2}} dx = \sqrt{} 1 . dx \text{ ist } = x$$
$$\int (1 - xx)^{\frac{2}{2}} dx \text{ ist } = [x - \tfrac{1}{3} x^3]$$
$$\int (1 - xx)^{\frac{4}{2}} dx \text{ ist } = [x - \tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^3]$$

und so geht die Reihe ins unendliche fort. Was aber das für Curven seien, welche diese Flächen geben, oder welchen krummen Linien bestimmte $\int ydx$ von diesem Schlag zukommen, wie sie aussehen, wie sie zu zeichnen seien; darüber

erklärt

erklärt sich Newton nicht weiter; genug, daß die Abscisse bei ihnen allen x heißt, und ebendieselbe Liniengröse für sie gemeinschaftlich ist; ihre Ordinaten aber — nicht die des Kreises, noch der Ellipse, noch der Hyperbel u. s. f. sind, sondern andre Perpendikel, welche indessen sichre und vollkommene Quadraturen veranlassen. Ihre schon vorhandene Reduction auf Gleichartigkeit des Ausdrukks, (da sie alle Functionen von x, und mit der Abscisse gegeben sind,) macht offenbar zunächst die Integration, und also auch die Quadratur überhaupt möglich, die in die Augen fallende Vollendung der Glieder aber, bringt die ganz genügende, vollendete Quadratur hervor, welche, wenn die aus den Potenzen entwikkelte Reihe unendlich-fortgehende Glieder hätte, nicht statt haben koennte.

§. 10.

Diese Erwaegungen oder ihnen ähnliche führten Newton zunächst an das grose Ziel. Sein Geist hieng vollendeten Quadraturen nach; und trug sich mit der Gestalt ihrer Gleichungen, d. i. der nur bis auf gewisse Potenzen steigenden und dann abbrechenden Reihen, welche quadrabeln Flächen zukaemen, und deren Gehalt rein ausdrükkten. Der Gedanke: „Näherungs-Quadra-

„turen

„ turen dürften doch wol unendlich = fortlauffen„ den Reihen correspondiren, und diese jenen! — —“ lag alsdenn nicht mehr ferne. Aber nicht ganze bejahte, sondern blos gebrochene und verneinte Exponenten koennen unendlich = fortlaufende Reihen geben; und in der Gleichung für den Kreis ist der eine Factor wirklich eine Potenz mit einem gebrochenem Exponenten. . .

So entstand in ihm das Bedürfniß, Potenzen wie $(a + b)^{\frac{1}{n}}$; oder $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, zu entwikkeln. Diese Entwikklung hieng aber ganz und gar von dem Gesezz des Fortgangs der Coefficienten ab, und dieses von der Einsicht, wie jeder Coefficient allgemein in den Ausdrukk des vorgegebenen Exponenten der Potenz zu versezzen, oder von diesem abzuleiten wäre. Zu dieser Einsicht aber verhalf dem feinen Denker die Schärfe seines Wizzes. Die Verbindungen seiner Gedanken, um das erwähnte Gesezz zu fassen, habe ich S. 34 — 37 zu errathen gewagt.

Laßt uns immer die zusammengesezzte Geistesbeschäfftigungen, deren Erfolg so gros war, bewundern! Seit hundert Jahren sind so viele Begriffe weiter auseinander gesezzt, so viele Schwürigkeiten, die um das binomische Theorem gleich=

sam

sam herumlagen, geebnet und beseitiget worden, daß wir uns vor der Unbilligkeit geflissentlich zu hüten haben, welche wol manche Vorarbeit bei Newtons Entdekkung für gar leicht erklären moechte. An welchen geringfügigen Vorbereitungen hieng freilich nicht immer, so lang die Welt steht, das Schwerste und Wichtigste, was der Mensch je ausgespäht hat? Aber diese geringfügige — meistens erst nach der Hand für geringfügig erklärte — Vorbereitungen, gehörig zu schaezen, zu hegen, und zu fördern, so daß das Resultat — eine wichtige Entdekkung werden mußte; o diese Anlage, und Mühe müsse nie verächtlich behandelt, müsse nie durch misgünstige oder hochfahrende Raisonnements erniedriget, und zu alltaeglichem Gedächtnis- oder Händewerk herabgezogen werden, damit nicht die Ehre des Verdienstes unter den Menschen dahin schwinde, damit nicht die Begier erstikkt werde, Ausspähungen über Gegenstaende, die in tiefen Gründen liegen, nachzusinnen, damit nicht der Sporn zerstossen werde, der nach hohen Zielen, die für Millionen im Dunkeln liegen, — unter diesen Millionen einen einzigen treibt!

§. 11.

Ehe wir uns von den bisher betrachteten Erfindungen Newtons entfernen, und andre Erfor-

forschungen von ihm zu beleuchten unternehmen, halte ich für räthlich, doch noch auf einigen Blättern die Umgestaltung jedes erhöhten Binomiums von $(a+b)^m$ in $(P+PQ)^m$, welche Newton für gut fand, und die daraus folgende Entwiklung der Reihenglieder, der Aufmerksamkeit meiner Leser zu empfelen.

Das binomische Theorem war erfunden. Die erste Darstellung desselben in Formeln, ist und bleibt wol immer die:

Eine jede willkürliche Potenz: $(a+b)^m$; ist

$$= a^m + m.a^{m-1}.b + \frac{m.(m-1)}{1.2}.a^{m-2}.b^2$$

$$+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}.a^{m-3}.b^3 + \text{rc. rc.}$$

Diese an sich richtige Reihe wird mit jedem weiter = folgenden Glied notwendig weitläuftiger. Newton sann also einem Mittel nach, die Beschwerlichkeit der ausgedehnten Glieder schicklich abzukürzen; und er stellte deshalb folgende Gleichung auf:

$(P+PQ)^m$ sey so viel als:

$$= P^m$$

$$= P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} . BQ + \frac{m-2}{3} . CQ \text{ ꝛc.}$$

Unleugbar wird die Reihe dadurch viel leichter zu übersehen, wird weniger mit Brüchen angehäuft; die Potenzen fallen (für das Auge) in den Gliedern gar weg, und in allen (Gliedern) der ganzen Reihe erscheint durchgehends ein beständiger Factor, Q.

Um der Reihe diese Einfachheit zu geben, mußte Newton freilich von der Einfachheit der Fundamental-Bezeichnung der Potenz selbst abgehen, und anstatt

$(a + b)^m$ annehmen: $(a + a . \frac{b}{a})^m$

Weil $\frac{b}{a}$ einen Quotienten vorstellt, so wählte er dafür den einzelnen Buchstaben Q; und nun hatte er

$(a + aQ)^m$ oder $(P + PQ)^m$

In der Entwikklung der Reihe mußte das erste Glied natürlich a^m oder P^m heissen.

Das zwete Gied muste, zuerst so geschrieben werden:

$m\, a^{m-1} . b$ oder $m . P^{m-1} . PQ$

Aber

Aber P^{m-1} mit P multiplicirt, ist (nach den ersten Regeln der Multiplication mit Potenzen,) so viel, als P^m allein; so wie $(3^{4-1}) \cdot 3 = 3^4$ ist.

Die zwei erste Glieder der Reihe sind also

$$= P^m + m \cdot P^m \cdot Q.$$

Das dritte Glied, (ehe es zusammen gezogen wird,) ist:

$$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-2} \cdot b^2; \text{ oder}$$

$$\left[\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot P^{m-2} \cdot P^2 Q^2\right].$$

Dafür läßt sich aber ganz gewiß auch schreiben:

$$\left[\frac{m-1}{2} \cdot m \cdot P^m \cdot Q \cdot Q\right]$$

Man betrachte von diesen fünf Factoren die drei mittlern. $(m \cdot P^m \cdot Q)$. Es sind eben die Factoren, welche das zweite Glied vollkommen ausmachen. Nennt man also das zweite Glied mit dem 2ten Buchstaben des Alphabets,

B, so wird das dritte sich durch $\frac{m-1}{2} \cdot BQ$ ausdrükken lassen.

Das vierte Glied ist alsdenn, (eigentlich und noch ohne Reduction):

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot P^{m-3} \cdot P^3 \cdot Q^3.$$

Dafür schreibe man:

$$\left[\frac{m-1}{3} \cdot \left(\frac{m-1}{2} \cdot \frac{m}{1} \cdot P^m \cdot QQ\right) \cdot Q\right]$$

Von diesen sieben Factoren machen die fünf mittlern augenscheinlich das nächstvorhergehende dritte ganze Glied aus. Giebt man diesem kurz die Signatur des dritten Buchstaben des Alphabets, C, so erhellet, daß das 4te Glied

$$= \frac{m-2}{3} \cdot CQ$$ heissen werde.

Damit ist das Gesez der Folge nun hinlänglich am Tag; und man kann jezt auch auf das erste und zweite Glied zurückgehen, und den mittlern Factor in diesem (P^m) durch A ausdrükken; So folgt alles nach einer Analogie; und man

ver-

versteht damit die Auseinandersezzung des erhöhten Binomiums $(P + PQ)^m$ in den Gliedern, wie sie oben neben einander stehen, gewiß vollkommen.

§. 12.

Das angezeigte Verfaren in Bildung der Reihen leidet keine wesentliche Abänderung, auch wenn der Exponent m ein Bruch ist; nur sieht alsdenn die Reihe, wie schon oben in Newtons Brief vorgekommen, so aus:

$$[P + PQ]^{\frac{m}{n}} \text{ ist } =$$

$$P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{m - dn}{(d+1)n} ZQ$$

Ist Q eine verneinte Gröse, P, m und n aber bejaht, so sind hiebei folgende zwei Hauptfälle zu bemerken: 1) Wenn m grösser, als n ist; 2) Wenn m kleiner als n ist.

In dem ersten Fall wechseln bejahte und verneinte Glieder vom zweiten an, (das verneint ist,) bis ein Glied kommt, in welchem der Coefficient,

ficient, $\frac{m - dn}{(d+1)n}$, verneint wird. Von diesem an werden alle folgende Glieder bejaht oder verneint, je nachdem das Glied mit einem solchen Coefficienten, selbst ein gerades oder ein ungerades Glied (in der Zälung vom ersten an) ist. Nemlich wenn auch $\frac{m - n}{2n}$ bejaht ist, wie allemal statt findet, so oft m grösser als n ist, so kann ja doch

$$\frac{m - 2n}{3n}, \text{ oder } \frac{m - 3n}{4n}; \ldots; \text{ od. } \frac{m - dn}{(d+1)n};$$

verneint seyn. Und von da an hört der Wechsel des bejahten und verneinten in den folgenden Gliedern auf.

Es sei z. B. $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$; und Q, wie gedacht, verneint angenommen, so wird

Das 1ste Glied bejaht seyn;

Das 2te verneint, wegen des Factors, Q;

Das 3te bejaht, wegen 2 verneinter Factoren, B und Q;

Das 4te, ebenfalls bejaht, weil da der Coef-

Coefficient, der aus m und n besteht, zum erstenmal verneint wird. Dann

$$\frac{m-2n}{3n} \text{ ist ja doch} = \frac{3-2.2}{3.2} \text{ d. i. } \frac{-1}{6}.$$

Zu diesem verneinten Factor kommt der 2te verneinte Factor Q. Diese geben ein bejahtes Product.

Der 3te Factor, C, ist vom 3ten Glied her bejaht. Also ist das ganze 4te Glied sicher bejaht.

Das 5te Glied hat wieder 2 verneinte Factoren

$$\frac{m-3n}{4n}; \text{ und } Q;$$

welche ein bejahtes Product geben. Darein multiplicirt D, ein dritter gewiß bejahter Factor weil D das nächstvorhergegangene bejahte Glied vorstellt.

Demnach läuft zuverlässig die Reihe in bejahten Gliedern, vom 4ten an, fort. Augenscheinlich ist dieses 4te ein gerades Glied, der Zälung nach genommen vom ersten an.

Ein zweites Beispiel sei: $\frac{m}{n} = \frac{5}{2}$. Da wird zuerst der Coefficient im 5ten Glied verneint;

$$\frac{m - 3n}{4n} = \frac{5 - 3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{-1}{8}$$

Für sich wäre dieses Glied im Wechsel bejaht; aber durch diesen verneinten Bruch wird es verneint.

Das nächstfolgende 6te Glied wird dadurch ebenfalls verneint. Denn $\left[\frac{m - 4n}{5n} \cdot D \cdot Q\right]$ sind alsdenn allerdings 3 verneinte Factoren.

Mit dem 7ten und jedem folgenden Gliede verhält sichs eben so; und alle Glieder ins unendliche bleiben verneint.

Das 5te aber, mit dem die verneinten anfiengen, ist der Zälung nach ein ungerades.

Und hiemit ist die Behauptung der allgemeinen Gesezlichkeit wohl genug dargethan.

Der 2te Hauptfall, dessen gedacht worden, ist der: wenn m kleiner, als n in Concreto ist.

Da

Da sind natürlich alle Coefficienten, in welchen $m-n$, $m-2n$, ... $m-dn$ vorkommt, verneinte Grösen. Daher sich ergiebt, daß alle Glieder, vom 2ten an, schon durchgehends verneint werden. Nehmlich

Das erste $P^{\frac{m}{n}}$, z. B. $P^{\frac{1}{2}}$, ist bejaht.

Das 2te $\frac{m}{n} \cdot A.Q$ ist verneint; weil durch Q, welches im Binomium bereits verneint angenommen worden, die (für sich bejahte) Factoren, $\frac{m}{n} \cdot A$, mit Q multiplicirt, ein verneintes Product geben müssen; Also ist $\frac{m}{n}AQ$ oder B verneint.

Das 3te Glied ist $\frac{m-n}{2n} \cdot B.Q$; und verneint, weil es drei verneinte Factoren enthält. Denn $m-n$ giebt ja $(1-2) = -1$, wenn $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gilt. Also ist der erste Factor sicher verneint; der 2te B ebenfalls, vom 2ten Glied her, und Q, als beständig-verneinte Gröse, für sich.

Notwendig enthält so jedes folgende Glied 3 verneinte Factoren. Folglich läuft die Reihe bis ins Unendliche in verneinten Gliedern fort.

§. 13.

Anwendung hievon wird gemacht, in der Ordinaten-Gleichung für den Kreis:

$$\sqrt[2]{(1-xx)} \text{ oder } (1-xx)^{\frac{1}{2}};$$

wo $P = 1$; $PQ = \frac{-1 \cdot xx}{1}$; d. i. $= -xx$ gilt; und anstatt Q also allemal $-xx$ zu denken ist.

Die Reihe für $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ wird daher

$$= 1 - \tfrac{1}{2} \cdot A \cdot xx - \tfrac{1}{4} \cdot BQ - \tfrac{3}{6} \cdot CQ - \tfrac{5}{8} \cdot DQ - \ldots$$

welche ganz eben so viel besagt, als wenn mit ausgesezten Exponenten geschrieben wird, wie folgt:

$$= 1 - \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \ldots$$

Es fällt in die Augen, daß nach Newtons Bezeichnungsart die Fortschreitung der Coefficienten sich wegen der kleinern Zalen viel leichter übersehen läßt, als wenn man die leztere Methode wählt, ob man gleich auch bei dieser, wenn man die Coefficienten in Factoren zerfällt, sich einigermaßen die Uebersicht des Fortgangs erleichtern kann.

Ferner wird die Newtonische Abkürzungsart des Ausdruks auch, und recht vorzüglich, bei

Rectification der Kreisbögen

angewendet, d. i. wenn man einen Bogen des Zirkels durch den gegebenen Sinus, und Reihen der Potenzen desselben darstellt. Die Ueberzeugung von der Richtigkeit der Rectification selbst, beruht auf folgenden IV Hauptsäzzen, welche Newton Leibnizen nicht mitgetheilt, sondern (indem er ihm blos die Reihe S. 2. zusandte,) seiner eigenen Erforschung überlassen hat:

(I.) Jedes Stükk des Halbmessers, wie AP, in der Zeichnung (S. 48.) läßt sich durch

$$1 - CP, \text{ oder } [1 - \sqrt{(1 - ss)}]$$

ausdrükken, wenn r = 1 genommen wird, und s der Sinus bedeutet *). Der Beweis hievon wird in den Elementen der Trigonometrie gelehrt.

(II.)

*) Ich habe für die in Newtons Briefen gebrauchte Signatur x hier s gebraucht, weil gewöhnlich fast in allen Schriften in der Figur CP die Abscisse vom Mittelpunct x genannt wird.

(II.) Das Differeutial einer solchen Linie,

$$d.AP \text{ oder } MR \text{ ist} = \frac{-sds}{\sqrt{(1-ss)}};$$

Der Beweis hievon beruht darauf, weil das Differential von 1 so viel, als 0 gilt; das Differential einer Wurzelgröse aber, z. B. $d(\sqrt{v}) = \frac{du}{2\sqrt{v}}$ ist; und endlich $dss = 2sds$ gilt. Daher man sich (successiv)

$$d[1-\sqrt{(1-ss)}] = 0 - \frac{d(1-ss)}{2\sqrt{(1-ss)}} = \frac{-2.sds}{2\sqrt{(1-ss)}}$$

zu denken hat; wo $\frac{2}{2}$ sich zulezt hebt, und daher

$$\frac{-sds}{\sqrt{(1-ss)}} = d.AP \text{ oder } MR$$

hervorgeht *).

III.

*) Die erwähnte 3 Sätze, auf welchen dieser Beweis beruht, werden in den Elementen der Fluxionen oder Differential-Rechnung gelehrt.

(III.) Das Quadrat hievon mus eine bejahte Grösе seyn:

$$\frac{ss.(ds)^2}{1-ss} = MR^2;$$

Und diese Gleichung wird sogleich benüzt, indem man das Differential *) des Bogens Am,

$d.AM = \sqrt{[Rm^2 + MR^2]}$ so ausdrükt;

$$d.z = \sqrt{\left[ds + \frac{ss.ds^2}{1-ss}\right]};$$

Diese Grösе aber, unter einem Nenner gebracht, ist:

$$\sqrt{\left[\frac{ds^2 - ss.ds^2 + ss.ds^2}{1-ss}\right]};\text{ d. i.}$$

$$\sqrt{\left[\frac{ds^2}{1-ss}\right]} = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}};$$

Für welchen Quotienten sich aber auch zwei Factoren, der eine nemlich mit einem verneinten und gebrochenen Exponenten, schreiben lassen, so daß

$$dz = ds.(1-ss)^{-\frac{1}{2}}$$

gelten mus.

(IV).

---

*) Man sehe hierüber die Note in §. 9. S. 50. nach.

(IV.) Das Integral hievon, stellt den verlangten Kreisbogen z, durch den Sinus ausgedrükkt, dar, nemlich

$$\int dz \text{ oder } z \text{ ist} = \int [ds. (1-ss)^{-\frac{1}{2}}];$$

Um aber eine verständliche und brauchbare Gröse, als den Gehalt dieses Integrals zu bekommen, mus man zuerst für sich die Potenz mit dem negativen Expouenten in Glieder entwikkeln. Dieses geschieht ganz nach der Formel des binomischen Theorems; und darnach erhält man:

$$(1-ss)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1 + \tfrac{1}{2}ss + \frac{1 \cdot 3}{1.2.4}s^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1.2.4.8}s^5 + ..$$

so, daß die Reihe ganz aus bejahten Gliedern besteht, welche dem innern Werth nach beständig abnehmen. Multiplicirt man jedes Glied hierauf mit ds, und integrirt alsdenn Glied für Glied, so kommt die Reihe für z selbst an den Tag, die man *) so schreiben kann:

Z ist

*) Wenn der Halbmesser nicht bestimmt = 1, sondern allgemein = r gesezt wird, so bekommen die Potenzen von s folgende Nenner:

$$\frac{s}{r};\ \frac{s^3}{r^2};\ \frac{s^5}{r^4};\ ..$$

z ist =

$$s + \frac{1}{2.3}s^3 + \frac{1.3}{1.2.4.5}s^5 + \frac{1.3.5}{1.2.3.5.7}s^7 +$$

$$\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16.9}s^9 \ldots$$

Bringt man aber jedes nächstvorhergehende Glied, nach Newtons Weise und Vorschlägen, in dem nächstfolgenden wieder an, indem man $A = s$, und $B = \frac{1}{2.3}s^3$ gelten läßt, und so forthin ... so wird die Gestalt dieser Reihe gar viel einfacher, und leicht überschaulicher. Denn man erhält damit:

$$z = s + \frac{1}{2.3}.A.ss + \frac{3.3}{4.5}.B.ss +$$

$$\frac{5.5}{6.7}.C.ss + \ldots$$

Hiemit hat man eben die Gröse in der nemlichen Bildung wieder vor sich, welche bereits oben S. 7. in dem Auszuge von Newtons Briefe mitgetheilt worden, (nur daß dort der Sinus nicht mit s, sondern mit x bezeichnet, auch der Halbmesser = r beibehalten worden.)

Auf

Auf ähnliche Weise wird die Reihe, welche jeden Sinus im Ausdrukk des gegebenen Bogens ausdrükt *) umgebildet. Wenn $r = 1$ angenommen wird, so heißt sie in der ersten Darstellung:

$$s = z - \frac{1}{1.2.3} z^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} z^5 - + \ldots$$

wofür sich aber sezzen läßt:

$$s = z - \frac{zz}{2.3} . A - \frac{zz}{4.5} . B - - - \ldots$$

so daß in dieser Form nur verneinte Glieder sich zeigen. Man vergleiche hiemit was oben S. 67. schon angegeben worden.

Auch bei der integrirten Reihe für Kreisflächenstükke mus die Anwendung der Uebertragung durch A, B, C, D, . . . daher von vortheilhaftem Gebrauch zu seyn, indem die Darstellung

*) Den Beweis, wie diese Reihe selbst gefunden wird, übergehe ich hier. Es kommt auf eine Umkehrung der Reihe für den Bogen (z, durch s ausgedrückt,) an. Der Beweis steht in jedem Lehrbuch der Differential-Rechnung. Newton ließ denselben Leibnizens eigener Erforschung anheim gestellt.

stellung mit fortschreitenden (in den Nennern angebrachten) Factoren,

$$x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{8.5}x^5 - \frac{1}{16.7}x^7 - \frac{5}{128.9}x^9 -$$

$$\frac{7}{256.11}x^{11} - \ldots$$

doch nie eine so leichte Uebersicht des Fortgangs der Reihe gewährt, als wenn man, (wie oben S. 68.) beim dritten Glied schon $Q = - xx$ annimmt, und deshalb die Glieder so zu bilden Anlaß hat:

$$x - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}.A.xx - \tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{5}.BQ - \tfrac{3}{6}.\tfrac{1}{7}.CQ$$

$$- \tfrac{5}{8}.\tfrac{1}{9}.DQ - \tfrac{7}{10}.\tfrac{1}{11}.EQ - \ldots$$

§. 14.

Da es nicht in dem Plane dieser Diatribe liegt, einen vollständigen Commentar über den binomischen Lehrsaz noch über Newtons Briefe, die ihn betreffen, zu liefern, so mus ich vieles zurüklassen, was mit dessen Deduction und Anwendung wol ebenfalls genau zusammenhängt.

Wer sich insbesondere über die Wallische Interpolationen näher zu unterrichten wünscht,

und

und gerne sehen möchte, in wie weit sie das binomische Theorem angehen, den verweise ich auf den 1sten Band der vortreflichen Vorlesungen über Mathematik des K. K. Majors Vega, §. 315. (S. 456. der neuen Ausg.) wie auch auf die Differenzen-Lehre in der Kästner. Analysis endl. Grösen, §. 724 bis 734. Beede Werke verdienen in den Händen eines jeden Freundes höherer Mathematik zu seyn. Sowol aus diesen Werken, als aus eigenen fortgesezten Betrachtungen überzeugt man sich ohne grose Mühe, daß die Bildung der Binomial-Coefficienten, wie sie z. B. oben S. 30 in Reihen aufgeführt stehen, (durch fortgeseztes Differenzenziehen, und wenige Bemerkungen darüber,) sich nicht blos auf einem Weg an den Tag bringen läßt.

II.

Ueber Newtons Geschikk, grose Gesezze gewisser Theorien noch allgemeinern Gesezzen zu unterwerfen.

§. 1.

Es ist dem menschlichen Verstand eigen, alle einzelne Erscheinungen, die ihm vorkommen, und die er in dieser oder jener Hinsicht für erheblich erkennt, nach Möglichkeit zu ordnen, andere, die ihm gleichartig zu seyn dünken, an die erstern anzuschliessen, mehrere zu combiniren, und durch Zusammenstellung und Vergleichung derselben, wo es nur angehen mag, allgemeine Gesezzlichkeiten zu bilden. In Physik sind Geschäfte dieser Art nicht immer geglükkt; davon aber hier zu sprechen, ist nicht der Ort. In Mathematik sind meistens die eben dahin gehörige Versuche viel glükklicher von statten gegangen.

Die Bemühungen der Gelehrten im 16ten Jahrhundert, von Vietas Zeiten an, für ein-

zelne arithmetische Räthsel allgemeine Formeln zu finden, veranlaßten wol hie und da Ahndungen und Schlüsse, daß auch Gleichungen für geometrische Linien und Figuren einer allgemeinern Ausbildung fähig wären. Aber es verzog sich doch fast gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts hin, bis man sich über die Parabeln und Hyperbeln des Apollonius vom ersten Grad hin, auswagte, und mit Gleichungen für cubische und noch höhere Curven ins reine kam. Erst im Jahr 1669. theilte Newton seinem ehemaligen Lehrer, D. Barrow, Gleichungen für die Quadratur ganzer Geschlechter von Curven mit, bei welchen die Ordinaten-Gleichung allgemein $a^n . x^m = y^n$ hiesse, und bewies, daß deren Flächen durch

$$a\left(\frac{n}{m+n}\right) . x^{\frac{m+n}{n}}$$

für jeden Fall ohne Ausnahme sich ausdrükken lasse. Newton beginnt seine tiefsinnige Abhandlung, de Analysi, per æquationes numero terminorum infinitas, gerade zu mit diesem Sazz; und sogleich in der 7ten Zeile des ersten Paragraphs steht die angeführte Formel, die so unzälige Quadraturen unter sich faßt.

Die

Die Mühe wird sich wol lohnen, wenn wir in Kürze die Prämissen der Kenntnisse durchgehen, welche erforderlich waren, um zu einer solchen allgemeinen Quadratur-Gleichung zu gelangen.

§. 2.

Die vollkommene Quadratur der Apollonischen Parabel, deren Ordinaten-Gleichung ax = y heißt, war bereits von Archimedes entdekkt; aber die Beweise der Richtigkeit dieser Quadratur waren mit Beschwerlichkeit bis in die mittlern Decennien des vorigen Säculums geführt. Erst durch Newtons Fluxionen- und Leibnizens Differentialrechnung war man in den Stand gesezt, mit 10 bis 12 Zeilen den ganzen Beweis bündig darzustellen.

Folgende drei Actus geben ihn vollendet:

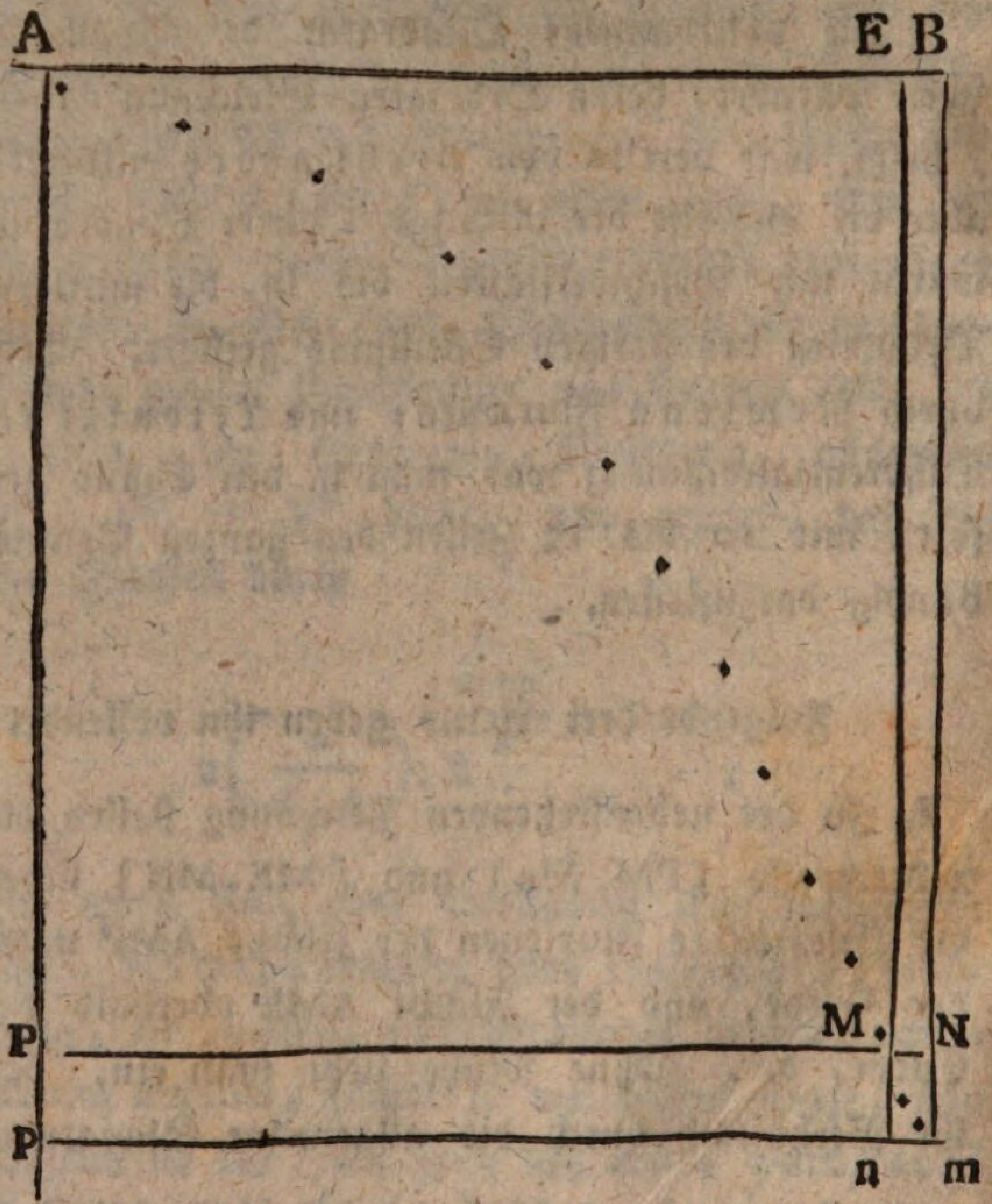
I. In der nebenstehenden Zeichnung stellen die 2 Rechtekke [PM.Mn] und [ME.MN] sicher die gleichzeitige Fluxionen der Fläche AMP unter der Curve, und der Fläche AME oberhalb der Curve, vor. Ohne Mühe sieht man ein, daß ihr Verhältniß durch die allgemeine Signaturen

x.dx : x.dy = [PM.Mn] : [ME.MN]

ausgedrükt werde.

II. Der Factor dx ist $= \frac{2ydy}{a}$. Denn die Ordinaten-Gleichung

$$yy = ax; \text{ giebt } 2ydy = adx$$



nach

nach den ersten Gründen des Differentiirens; und daraus folgt ja eben

$$dx = \frac{2ydy}{a}$$

III. Stellt man hierauf sogleich die Verhältnis der 2 Differential-Grösen in dieser Gestalt neben einander:

$$[PM.MN] : [ME.MN] = y. \frac{2ydy}{a} : xdy$$

so fällt in die Augen, daß die Verhältnis der Integrale selbst heissen müsse:

$$\frac{2yy}{a} : x; \text{ also } = 2yy : ax$$

das ist: 2yy zu yy; folglich 2 zu 1.

Die Integrale verhalten sich demnach ganz einfach, wie 2 zu 1. Aber das Integral von ydx ist nichts anders, als die Fläche unter der Curve, AMP;

und das Integral von xdy ist nichts anders, als die Fläche oberhalb der Curve, AME.

Notwendig verhalten sich also die 2 Flächen bei jeden willkürlich angenommenen Coordinaten

immer so; d. i. wenn das ganze Rechtekk [AP.PM] drei Quadratfus Fläche hält, so beträgt die Fläche unter der Curve zwei derselben; und ist hiemit rein quadrirt.

Die Behauptung, jede parabolische Fläche solcher Art, AMP sei = $\frac{2}{3}xy$, ist daher vollkommen eben damit dargethan.

Der Beweis wird, ohne daß man auf den Neben-Raum AME, und auf Proportionen kommt, blos in Beziehung auf die Fläche unter der Curve AMP auch so geführt:

Diese Fläche ist allgemein = $\int y . dx$. Für y sezze man die Ordinaten-Gleichung, mit gebrochenen Exponenten geschrieben, ein, so wird

$$\int y . dx = \int a^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} . dx,$$

Man schreibe unter: $\int b . x^{m-1} . dx$

eben die allgemeine Formel, welche bereits S. 53. angeführt worden, und überlege, wie der Exponent $\frac{1}{2}$ soviel, als $m - 1$ seyn könne? Natürlich, wenn $m = \frac{3}{2}$ gilt; denn $\frac{3}{2} - 1$ ist $= \frac{1}{2}$. Auf diese Art sieht man, daß, wenn

$$\int [b x^{m-1} . dx] = b . \frac{1}{m} . x^m \text{ gilt;}$$

auch

auch $\int[a^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}-1}dx] = a^{\frac{1}{2}}.\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}]$

gelten müsse. Aber es ist bekannt, daß

$$x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{2}{2}}.x^{\frac{1}{2}} \text{ oder } = x.x^{\frac{1}{2}}$$

bedeute. Das zulezt gesezte Integral ist deshalb so viel, als

$$[a^{\frac{1}{2}}.\tfrac{2}{3}x.x^{\frac{1}{2}}]; \text{ oder } = \tfrac{2}{3}x.(ax)^{\frac{1}{2}}; \text{ d. i.}$$

$= \frac{2}{3}xy.$

Und hiemit ist die Quadratur *) auch auf diesem Weg ins reine gebracht.

§. 3.

Mit der Quadratur der Apollonischen Parabil mußte die der Cubischen verbunden werden, und ehe diese berichtiget war, scheint es keine Möglichkeit gewesen zu seyn, Gesezze für Curven, denen allgemeine Gleichungen zugehörten, zu entdekken.

Die

*) Ich habe die Constante hier übergangen, weil sie in dieser Gleichung = 0 ist; Auch oben beim Creis S. 44. war sie 0. Newton und die ältern Algebraiker gedenken ihrer fast niemals in diesem Fall.

Die Ordinaten-Gleichung für cubische Parabeln heißt:

$$[a.x^2] = y^3; \text{ oder } \sqrt[3]{[a.xx]} = y.$$

Man gelangt zu ihrer Einsicht auf folgendem Weg:

Wenn man in eine Apollonische Parabel oder in ein Stükk derselben, APM, eine Sehne AM einzeichnet, auf den Endpunkt derselben in A (im Scheitel) ein Perpendikel sezt, von dem andern Ende derselben Sehne M eine Linie herüber, und so lange fortzieht, bis sie einen Punkt, R, in dem Perpendikel trifft, ferner durch den Scheitel der Parabel eine Linie, wie QS paralell mit der (nun schon vorhandenen) Linie MR zeichnet, und endlich von R auf diese Paralele ein Loth fällt; so ist SR eine Ordinate in einer cubischen Parabel, R ein Punkt in der Curve dieser cub. Parabel, und wenn SR = y heißt, $y = \sqrt[3]{(axx)}$.

Beweis.

1) In dem rechtwinkl. Dreiekk AMR, ist gewis $PM : AP = AP : PR$

und auch quadrirt:

$$PM^2 : AP^2 = AP^2 : PR^2.$$

2) Der

2) Der Linie AP ist die, SR, ganz gleich; (es sind ja Lothe zwischen 2 Paralelen.) Daher wird eben so viel gelten:

$$PM^2 : SR^2 = SR^2 : PR^2$$

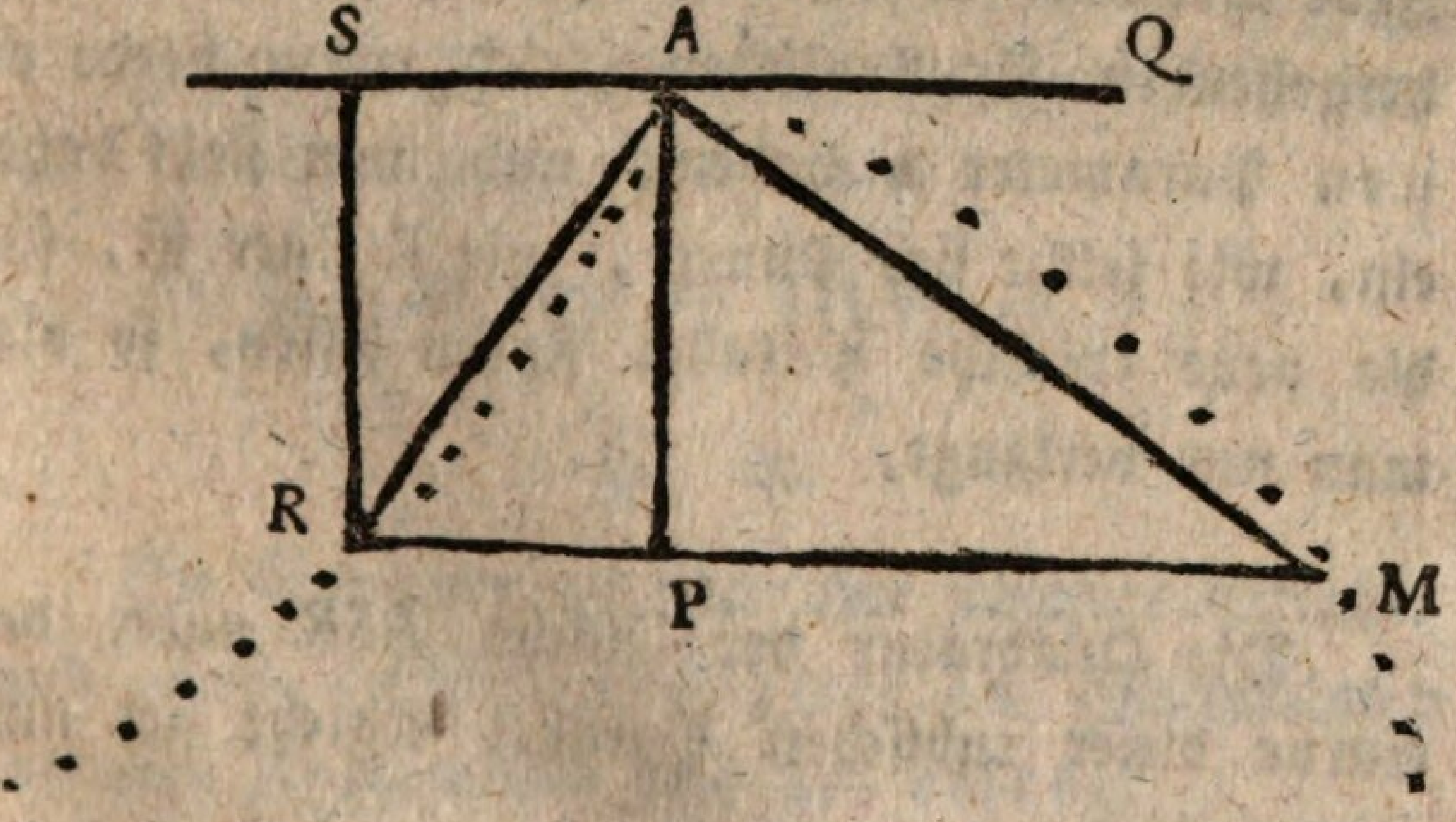
oder auch, weil PR so gros, als AS ist, wie in die Augen fällt:

$$PM^2 : SR^2 = SR^2 : AS^2.$$

3) Man bezeichne diesmal die Abscisse *AP* in der Apoll. Parabel nicht mit x, sondern mit y; (welches wol angeht, da allgemeine Signaturen willkürlich sind,) so werden natürlich nach dieser Annahme

$$PM^2 = a.AP, \text{ und } PM^2 = a.y$$

gleichgeltende Ausdrükke seyn.



Ferner benenne man PR oder AS mit x, so wird $AS^2 = xx$ gelten.

Diese Ausdrükke sezze man nun unter die Glieder der Proportion:

 PM²

$$PM^2 : SR^2 = SR^2 : AS^2$$

wie folgt: $a.y : y^2 = y^2 : xx.$

4) Daraus folgt: $y^4 = ayxx$; und durch y dividirt:

$$y^3 = axx.$$

Folglich eben damit: $y = \sqrt[3]{(axx)} = SR.$

Jede grössere Sehne als AM veranlaßt eine größre Ordinate, als SR, und eine grössere Abscisse als AS; aber das Verfaren bleibt das nemliche, und die deducirte Gleichung besteht für alle mögliche Ordinaten der neuen cubischen Parabel. Jede Ordinate in dieser ist der Abscisse in der vorhergehenden Apollonischen gleich, wenn beede einen Parameter a haben; und man sieht daher ein, wie leicht sich Puncte, wie R einer ist, für die neue cubische Parabel finden lassen, so viel man nur verlangt.

Die Quadratur der Fläche ASR unter der Curve dieser cubischen Parabel ergiebt sich nun weiter also:

Die gesuchte Fläche ist hier das Integral

$$\int ydx = \int[\sqrt[3]{(axx)}.dx].$$

Dafür

Dafür mus aber geschrieben werden:

$$\int a^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{2}{3}} . dx \text{ oder } \int [a^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{5}{3}-1} . dx].$$

Wendet man hiernächst wieder die bekannte Formel an:

$$\int b . x^{m-1} . dx = b . \frac{1}{m} . x^{m};$$

so ergiebt sich hier: $a^{\frac{1}{3}} . \frac{3}{5} . x^{\frac{5}{3}}$.

Weil aber $x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{3}{3}}$ ist, so läßt sich das Integral auch schreiben:

$$[a^{\frac{1}{3}} . \frac{3}{5} . (xx)^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{3}{3}}] \text{ d. i. } \frac{3}{5} . (axx)^{\frac{1}{3}} . x.$$

Aber, der Deduction der vorigen Seite gemäs, ist sicher ganz eben so viel

$$= \frac{3}{5} . y . x; \text{ oder } = \frac{3}{5} . [SR . AS].$$

§. 4.

Die Geometer nennen eine cubische Parabel auch eine Parabel des zweiten Geschlechts; und eine Apollonische eine des ersten.

Die Ordinaten-Gleichung einer Parabel des dritten Geschlechts ist: $a . x^3 = y^4$; und ihre Quadratur beträgt allgemein $= \frac{4}{7} . xy$.

Die

Die Deduction dieser Ordinaten-Gleichung läßt sich so durchführen:

Gesezt, die uns bisher in der Figur als eine des ersten Geschlechts vorgestellte Parabel, mit den Coordinaten AP, und PM, wäre eine des andern, d. i. eine cubische; und es würde daraus eine des 3ten Geschlechts gesucht, so sezzet *man* wieder: (da die Linien A, M, P, R, bleiben,)

$$PM : AP = AP : PR;$$

oder: $PM : SR = SR : AS;$

und cubirt darauf jedes Glied, (so wie man vorher alle quadrirt hat,)

$$PM^3 : SR^3 = SR^3 : AS^3;$$

Dafür schreibe man aber nun die gleichgeltende Ausdrükke unter:

$$a.yy : y^3 = y^3 : x^3;$$

Sie rechtfertigen sich eben so leicht, als die im vorherg. §., wenn man nur $PM^3 = a.AP^2$ denkt, weil hier die cubische Parabel schon als gegeben angenommen wird, und alsdenn wieder $AP = y$, (nicht $= x$) nennt; also auch SR; dagegen AS oder PR mit x bezeichnet.

Aus

Aus dieser Proportion kommt die Gleichung

$$y^6 = ayy \cdot x^3 \text{; und also } y^4 = a \cdot x^3$$

zum Vorschein; und so ist die Ordinaten-Gleichung deducirt. Notwendig ist daher dabei

$$y = [a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}].$$

Die Quadratur dieser Parabel ist:

$$\int y \cdot dx = \int [a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot dx];$$

Dafür darf man schreiben:

$$\int [a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{7}{4}-1} \cdot dx] \text{; d. i. } [a^{\frac{1}{4}} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}}];$$

und weil ganz eben soviel ist

$$\tfrac{4}{7}(a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}) \cdot x^{\frac{4}{4}} \text{, das heißt: } \tfrac{4}{7} \cdot y \cdot x,$$

so ist damit auch die Quadratur dieser Parabel vom 3ten Geschlecht berichtigt und erwiesen.

§. 5.

Auf gleichförmige Art gehen die Darlegungen der Ordinaten-Gleichungen für Parabeln der folgenden Geschlechter nebst ihren Quadraturen fort, und es kostet nun nicht mehr viele Mühe, um einzusehen, daß nächstfolgende Formeln zusammen gehören, noch bedarf es Erläuterung, wie sie auf einander folgen:

Para=

Parabeln.	Ihre Ordinaten-Gleichungen.	Quadraturen ihrer Flächen.
Vom Isten Geschlecht	$y^2 = ax$	$\frac{2}{3} . xy = a^{\frac{1}{2}} . \frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}}$
Vom IIten Geschlecht	$y^3 = axx$	$\frac{3}{5} . xy = a^{\frac{1}{3}} . \frac{3}{5} . x^{\frac{5}{3}}$
Vom IIIten Geschlecht	$y^4 = ax^3$	$\frac{4}{7} . xy = a^{\frac{1}{4}} . \frac{4}{7} . x^{\frac{7}{4}}$
Vom IVten Geschlecht	$y^5 = a . x^4$	$\frac{5}{9} . xy = a^{\frac{1}{5}} . \frac{5}{9} . x^{\frac{9}{5}}$
. . . .	. . .	. . . . .
Vom n — 1ten Geschlecht:	$y^n = a . x^{n-1}$	$\frac{n}{2n-1} xy = a^{\frac{1}{n}} . \left(\frac{n}{2n-1}\right) x^{\frac{2n-1}{n}}$
Vom nten Geschlecht:	$y^{n+1} = a . x^n$	$\frac{n+1}{2n+1} xy = a^{\frac{1}{n+1}} . \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) x^{\frac{2n+1}{n+1}}$

Diese

Diese Formeln sind nun zwar schon sehr allgemein; und umfassen allerdings unzälige Fälle; sie sezzen aber doch alle Parabeln voraus, welche insgesammt einen und ebendenselben Parameter = a, oder a^1 haben. Allein es ist nicht notwendig, dieser Annahme treu zu bleiben, welche man blos, in der ersten Zeichnung, Anfängern zu gefallen wählt. Der Parameter kann auch a^b, oder a^n heissen, und in diesem Fall folgen die Formeln für die Quadraturen so:

$$(a^{\frac{n}{2}} . \tfrac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}}); \quad (a^{\frac{n}{3}} . \tfrac{3}{5} . x^{\frac{5}{3}}); \quad (a^{\frac{n}{4}} . \tfrac{4}{7} . x^{\frac{3}{4}});$$

Trifft es nun so zu, daß y einen Exponenten hat, welcher dem Exponenten von a gleich ist, oder kommt

ein Parameter = a^n,

und eine Ordinaten-Gleichung zu y^n

vor; so fällt in die Augen *), daß der erste der drei Factoren in den Formeln für Quadraturen

$a^{\frac{n}{n}}$, d. i. a^1 oder a schlechthin heissen wird.

---

*) Denn in dem gebrochenen Exponenten, den a hat, ist der Nenner allemal dem Exponenten, den y in der Ordinaten-Gleichung hat, gleich.

wird. Und die ganze Quadratur-Formel heißt daher:

$$a\left(\frac{n}{2n-1}\right).x^{\frac{2n-1}{n}}$$

als der Betrag der Fläche unter parabolischen Curven von dem Geschlecht, welchem die Ordinaten-Gleichung

$$a^n . x^{n-1} = y^n \text{; oder } a . x^{\frac{n-1}{n}} = y$$

zukommt.

§. 6.

Newton beruhigte sich nicht bei der Ausdehnung dieses Geschlechts, so weit auch schon dessen Umfang reicht. Er erwog, daß die Regelmäsigkeit der Exponenten zu y und x mit n, und n—1, in der Ordinaten-Gleichung, doch eine grose Beschränkung mit sich führe, und der Gedanke lag ihm (wie es scheint) an, die Schranken dieser Ordnung zu erweitern. Natürlich mus ein Geschlecht, welchem die Ordinaten-Gleichung

$$a^n . x^{n-r} = y^n$$

zukommt, wenn r eine veränderliche Gröse vorstellt,

stellt, gar viel mehr umfassen, als ein Geschlecht, mit der Ordinaten-Gleichung von der Gestalt und Eigenheit:

$$a^n \cdot x^{n-1} = y^n;$$

Denn n—r kann offenbar jede Grösse, verneinte, bejahte, ganze und gebrochene, andeuten, wenn r willkürlich gewält werden darf, und unbestimmt oder allgemein, wie jeder Buchstabe in Algebra gedacht wird. Es fällt also in die Augen, daß n—r von n gar nicht so abhängt, wie n—1 von n; und der Unterschied zwischen der Forderung:

„eine Grösse um 1 vermindern,"

und zwischen der Gestattung:

„eine Grösse um jede willkürliche Zal vermindern dürfen,"

trägt doch gewiß die Weite eines unübersehlichen Abstandes mit sich. In dieser Hinsicht geht es auch allerdings an,

anstatt $a^n \cdot x^{n-r} = y^n$,

zu sezzen: $a^n \cdot x^m = y^n$,

indem kein Grund vorhanden ist, warum sich

nicht in Kürze m für n—r sollte einsezzen lassen, da (wie gedacht,) die Differenz n—r jede Grösе ohne Ausnahme vorstellen kann.

Zieht man beederseits die Wurzel von Grade n aus dieser Gleichung, so wird leicht begreiflich

aus $a^n . x^m = y^n$, die: $a . x^{\frac{m}{n}} = y$.

Und dieses ist eben die allgemeine Ordinaten-Gleichung, welche Newton behandelt hat. Von ihr ist er ausgegangen, die Quadratur ihrer zugehörigen Curven ins reine zu bringen.

§. 7.

Wie für diese Quadratur die allgemeine Fläche (unter der Curve), oder

$$z = a\left(\frac{n}{m+n}\right) . x^{\frac{m+n}{n}}$$

erzielet werde, kann man wenigstens auf drey Wegen einsehen lernen:

1) Wenn man dem Gang unserer Deduction von §. 2. bis §. 6. folgt, und zusammen denkt:

Zu

Zu einer Ordinaten-Gleichung, welche

$$a^n \cdot x^{n-1} = y^n$$

heißt, gehört die Quadratur der Fläche unter der Curve

$$z = a\left(\frac{n}{2n-1}\right) \cdot x^{\frac{2n-1}{n}}$$

wie deutlich dargethan worden ist.

Analogisch zu schließen, dürfte daher zu einer Ordinaten-Gleichung, welche

$$a^n \cdot x^{n-r} = y^n$$

heißt, wol eine solche Quadratur der Fläche ihrer Curve gehören, welche heissen wird:

$$z = a\left(\frac{n}{2n-r}\right) \cdot x^{\frac{2n-r}{n}}$$

Da aber 2n—r soviel, als n + (n—r) bedeutet, und anstatt n—r sich m in Kürze einsezzen läßt, so wird die Quadraturformel hiernach bequemer so heissen:

$$z = a\left(\frac{m}{n+m}\right) \cdot x^{\frac{n+m}{n}}$$

und dieses ist eben die Regel oder Formel, welche Newton aufstellt.

2) Man gelangt zu eben dieser Formel, wenn man sich die Ordinaten-Gleichung, als vorgegeben, in der Absicht, eine Quadratur zu versuchen, vorlegt:

$$a^n . x^m = y^n \text{; oder } a . x^{\frac{m}{n}} = y.$$

die leztere Formel unverzüglich differentiirt, d. i. statt der leztern Signaturen

$$a . x^{\frac{m}{n}} dx = y dx$$

sezt, und hierauf, ganz nach den Regeln, die in §. 2. und §. 3. vorkommen, das Integral zieht; nehmlich so, wie

$$\int [b . x^{m-1} . dx] \text{ ausgiebt } = b . \frac{1}{m} x^m \text{;}$$

$$\text{und } \int [b . x^m . dx] \text{ ausgiebt } = b \left(\frac{1}{m+1} \right) . x^{m+1}$$

so mus

$$\int [a . x^{\frac{m}{n}} . dx] \text{ ausgeben } = a \left(\frac{n}{m+n} \right) . x^{\frac{m+n}{n}}$$

indem ja $1 : \left(\frac{m}{n} + 1 \right)$ soviel als $1 : \frac{m+n}{n}$ beträgt,

trägt, d. i. in Division, wo Zäler und Nenner sich umkehren, $= \frac{n}{m+n}$.

Hiemit ist also auch auf diesem Weg ebendieselbe Quadratur dargethan.

Newton kannte wol beede Weege, indem er bereits im Jahr 1661. das Wesentliche der Fluxionenrechnung sich eigen gemacht, und erst 1669. die deducirte Quadraturformel mitgetheilt hat. Die Art aber, wie er den Beweis davon vorzutragen für gut fand, gieng doch von derjenigen ab, die uns nun bekannt ist. Ich will seine Deduction für einen Fall hersezzen:

§. 8.

Er zeichnet die S. 97. stehende Figur, (in der ich blos die griechische Buchstaben in lateinische umgesezt habe,) und fängt dann so an:

Die Abscisse AP sei = x; die Ordinate PM = y. (M liegt also in der Curve, ist ein Punkt darinn.)

Die Fläche APM heisse Z. Die Verlängerung der Abscisse um ein unendlich kleines Stükkchen, Pp, heisse dx. Die senkrechte, über die Curve etwas hinausreichende Linie PK heisse = v.

Das Rechtekk PKRp läßt sich also in 2 Factoren vorstellen, PK.Pp = v.dx; und der Fläche dieses Rechtekks sei die Fläche PMmp gleich *).

Die Bezeichnung von Ap, das ist: von AP + Pp ist nun x + dx; und die von der Fläche

Amp, oder APM + PK.Pp ist = Z + v.*dx*.

Die Coordinaten x und y haben natürlich ein Verhältnis zu einander. Dieses sei noch unbekannt; man findet es, oder y durch x ausgedrükkt, wie folgt:

1) Der Betrag der Fläche APM oder Z werde von einer willkürlichen Grösse, als gegeben, angenommen. Das Suppositum sei

$$Z = \tfrac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}}, \text{ oder } \tfrac{2}{3} . \sqrt[2]{xxx}.$$

Notwendig wird daher ZZ = $\tfrac{4}{9}$. xxx betragen.

2) Man

*) Diese Annahme, welche ohne Bekanntschaft mit Säzzen der Annlysis des Unendlichen etwas befremdliches enthält, hat blos statt, weil P unendlich nahe an p, und M in der Curve unendlich nahe an m liegen soll.

2) Man schiebe in die Gleichungen ein:

$x + dx$ für x; $Z + v . dx$ für Z,

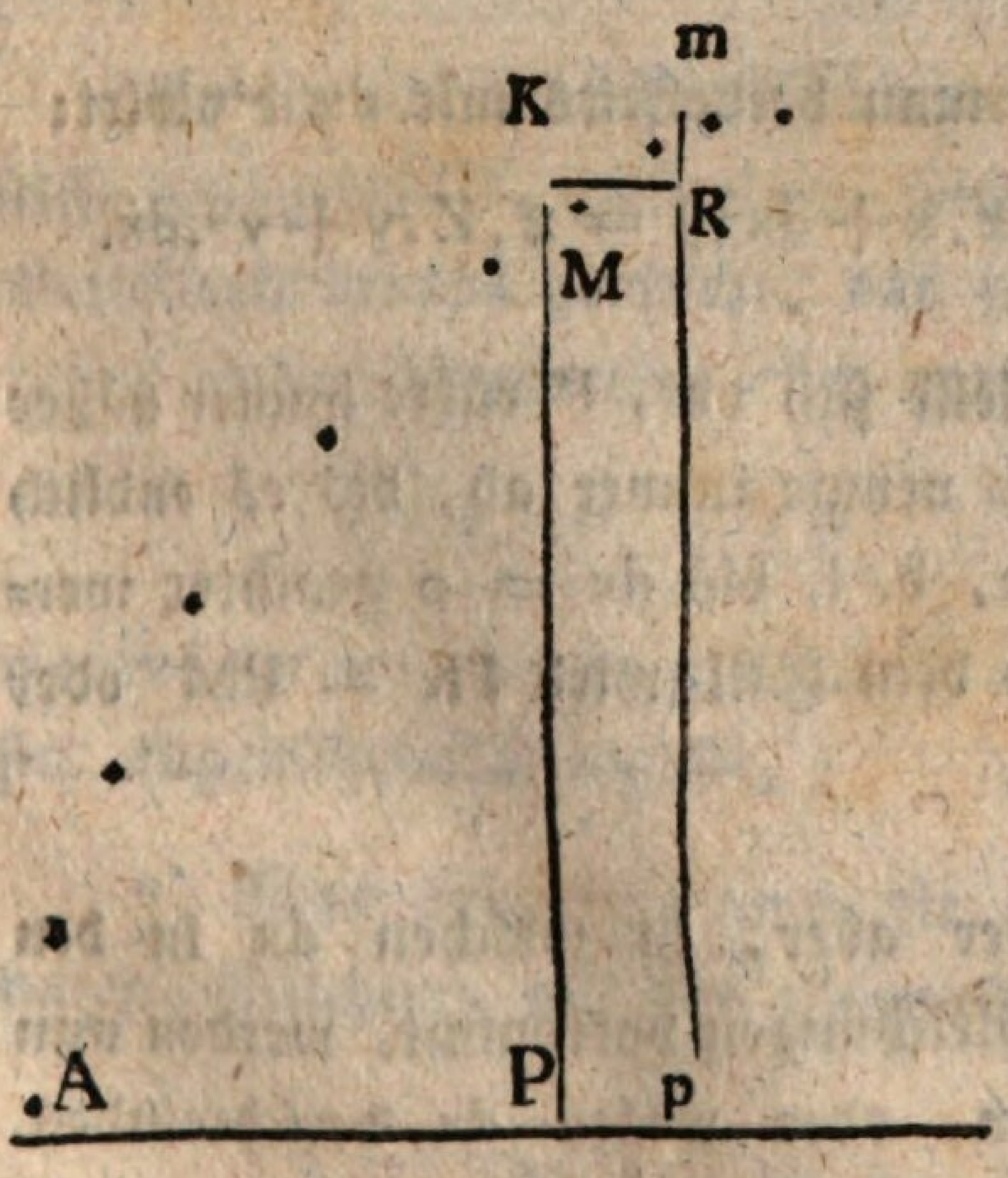
so wird man

anstatt $\frac{4}{9} . x^3$ auch erhalten $\frac{4}{9} . (x + dx)^3$,

anstatt ZZ aber $(Z + v . dx)^2$,

und beede Grösen werden Aequivalente seyn, weil nach Nro. 1.

$ZZ = \frac{4}{9} . x^3$ statt hat.



 3) Man

3) Man sezze diese Aequivalente aus, und stelle sie zusammen: Die Gleichung kommt zum Vorschein:

$$\frac{4}{9}.(x^3 + 3.dx.x^2 + 3.dx^2.x + dx^3)$$
$$= Z^2 + 2.Z.v.dx + v^2.dx^2.$$

4) Von derselben kann man aber offenbar die 2 vordern Glieder sogleich weglassen, weil sie gleichviel betragen, so daß bleibt:

$$\frac{4}{9}(3.dx.x^2 + 3.dx^2.x + dx^3)$$
$$= 2.Z.v.dx + v^2.dx^2.$$

Und wenn man beederseits mit dx dividirt:

$$\frac{4}{9}.(3x^2 + 3.dx.x + dx^2) = 2.Z.v + v^2.dx.$$

5) Man stelle sich vor, P rükke immer näher an p, d. i. Pp nehme immer ab, bis es endlich gar verschwinde, d. i. bis dx = o geachtet werden könne. In dem Fall wird PK = PM oder v = y werden.

Die Glieder aber, in welchen dx in den obenstehenden Gleichnngen vorkommt, werden nun ganz wegbleiben, oder wegen dx verschwinden. Es können daher nur noch die Aequivalente übrig bleiben:

$\frac{4}{9}.3.x^2$

$\frac{4}{9} . 3 . x^2 = 2 . Z . v$; oder $= 2 . Z . y$; das ist: $\frac{2}{3} . xx = Z . y$.

6) Nun sezze man für Z wieder die Geltung ein, welche im ersten Suppositum (in Nro. 1.) angenommen worden; nehmlich $\frac{2}{3} . \sqrt{x^3} = Z$; so wird

$$\frac{2}{3} . xx = \frac{2}{3} . \sqrt[2]{x^3} . y.$$

Und daraus folgt:

$$\frac{x^2}{\sqrt[2]{x^3}} = y; \text{ d. i. } \frac{x . x}{x . \sqrt[2]{x}}; \text{ oder } \sqrt[2]{x} = y.$$

Damit hat man die Ordinate, durch die Abscisse ausgedrükkt, gefunden, und das verlangte Verhältnis heraus gebracht, das man auch, ausgesezt in der Proportion, sich vorstellen kann:

$$1 : y = y : x$$

woraus $yy = x$; und alsdenn $y = \sqrt{x}$ oder $x^{\frac{1}{2}}$ sich augenscheinlich ergiebt.

7) Man vergleiche nun die erhaltene Ordinaten-Gleichung mit der allgemeinen Formel:

$$a . x^{\frac{m}{}} = y,$$

und sezze unter: $1 . x^{\frac{1}{2}} = y$;

so erhellet, daß hier $m = 1$; $n = 2$ zu nehmen sei. Diese Geltungen sezze man in die allgemeine

$$\text{Quadraturformel } \frac{n}{m+n} . a . x^{\frac{m+n}{n}} = Z.$$

$$\text{einzeln ein: } \frac{2}{1+2} . 1 . x^{\frac{2+1}{2}} = Z$$

Offenbar heißt dieses eben so viel, als

$$\tfrac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}} \text{ oder } \tfrac{2}{3} . \sqrt[2]{x^3} = Z.$$

Und so sind wir also durch das Verfaren von Nro. 1. bis Nro. 7. ganz auf eben die Gleichung hinaus gekommen, welche im Anfang von uns für die Fläche APM oder Z angenommen worden. Die Ordinaten-Formel und die Quadratur-Formel bewähren sich demnach wechselseitig, und es ist an ihrer Richtigkeit nicht weiter zu zweifeln.

§. 9.

Newton kannte mehr, als eine Methode, nach der sich aus dem angenommenen Betrag der Fläche unter einer Curve, und einer der Coordinaten, auf die andere schliessen, und diese sich (meistens in Reihen) angeben liesse. Aber er

fand

fand nicht für räthlich, alles mitzutheilen, was er in seinen Erörterungen darüber entdekt hatte.

— Modum, regrediendi ab areis ad lineas rectas, celare statui — schrieb er noch 1676. an Oldenburg.

Auch weis ich nicht, ob es ausgemacht ist, daß die erste Diatribe in seinen Opusculis, aus welcher die auf den nächstvorhergehenden Blättern betrachtete Ordinaten = und Quadratur = Formeln genommen sind, schon im Jahr 1669. so ganz vollendet war, wie wir sie jezt besizzen. Wenigstens scheint mir der in §. 8. vorgetragene Beweis erst später der Diatribe beigefügt worden zu seyn. Er steht ganz am Schluß derselben, gar nicht unmittelbar nach den aufgestellten Formeln, zu welchen er gehört; eine Menge andrer Untersuchungen stehen dazwischen. — Ueberdem hatte Newton sogleich unter die Aufschrift der ganzen Abhandlung die Worte gesezt:

„Methodum — in sequentibus breviter explicatam potius, quam accurate demonstratam habes!„

Sogleich darauf kommen die Formeln; er gab ihnen selbst den Namen: Regulae; und versah sie

blos

blos mit kurzen Beispielen. Nachdem er über die Quadratur einfacher Curven sechs dergleichen gegeben, geht er zur Quadratur zusammengesezter Curven fort, giebt aber wieder nur Regeln (allgemeine Vorschriften) ohne Beweise, und fügt denselben blos Beispiele bei. Erst am Ende kehrt er zu der allerersten Formel zurük, und theilt die in §. 8. befindliche Demonstration mit, zuerst für eine parabolische Curve, mit der Coordinaten-Gleichung $y = \sqrt{x}$, und darauf allgemeiner für Curven, welchen die Ordinaten-Gleichung $y = a \cdot x^{\frac{m}{n}}$ zukommt. Wie er hiebei regressiv verfare, leuchtet nun wol aus §. 8. sattsam in die Augen.

Uebrigens ist die Curve, welche sich Newton bei der Ordinaten-Gleichung $y = x^{\frac{1}{2}}$ gedacht hat, wie wol jeder leicht einsieht, eine Apollonische Parabel, deren Parameter $a = 1$ von ihm angenommen wurde. Die quadrirte Fläche derselben (wie oben bereits S. 83. vorgekommen,) beträgt

$\frac{2}{3} \cdot xy$, oder $\frac{2}{3} x \sqrt{ax}$; also hier $\frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$; oder $\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$.

§. 10.

§. 10.

Beispiele von solchen parabolischen Curven, welche nicht in der Reihe der aufeinander folgenden Geschlechter von Parabeln, die in unserm §. 5. S. 90. angegeben sind, stehen, und welche eben die Ausdehnung der Newtonschen Hauptformel bewähren, giebt er in seiner Diatribe (sogleich nach der aufgestellten Regel,) in gewohnter Kürze, indem er mit folgenden Worten anhebt:

„Wenn $xx = 1.x^{\frac{2}{1}} = y$ gilt, also $a = 1$
„$= n$; und $m = 2$ genommen wird; so ist
„die Fläche AMP $= \frac{1}{3}.x^3$.„

Es könnte auch stehen: $n = 2$; $m = 4$.

Newton nimmt nehmlich hiebei eine Curve an, bei welcher

der Parameter $= 1$ heißt; und also denkt er $a = 1$; die Ordinaten-Gleichung aber $x^4 = yy$.

Offenbar ist diese Curve gar nicht unter denen Geschlechtern von Parabeln, welche oben auf S. 90. nach der Reihe vorgestellt sind, enthalten, indem der Exponent von y um 2 ganze Zalen von dem von x unterschieden ist; (und also

nicht

nicht blos um $n-1$;) Sie paßt aber allerdings zu der allgemeinen Formel:

$$a^n \cdot x^m = y^n \text{ ; wenn man untersezt:}$$

$$1^2 \cdot x^4 = y^2.$$

Die allgemeine Quadratur-Formel

$$a\left(\frac{n}{m+n}\right) \cdot x^{\frac{m+n}{n}} \quad \text{wird daher zu:}$$

$$1 \cdot \left(\frac{2}{4+2}\right) \cdot x^{\frac{4+2}{2}}$$

oder (da der erste Bruch nicht mehr als $\frac{1}{3}$ beträgt,) zu $\frac{1}{3}x^3$; und die Fläche unter einer Curve, welcher eine Ordinaten-Gleichung, wie die angeführte zugehört, ist also in Rechnung ein Drittel des Cubus von x.

Damit sich jeder deutlich vorstellen könne, wie eine Curve erzeugt werde, unter welcher den eingeschriebenen Ordinaten allen die Gleichung $xx = y$ zukommt, mag nur folgende sehr leichte Construction erwogen werden.

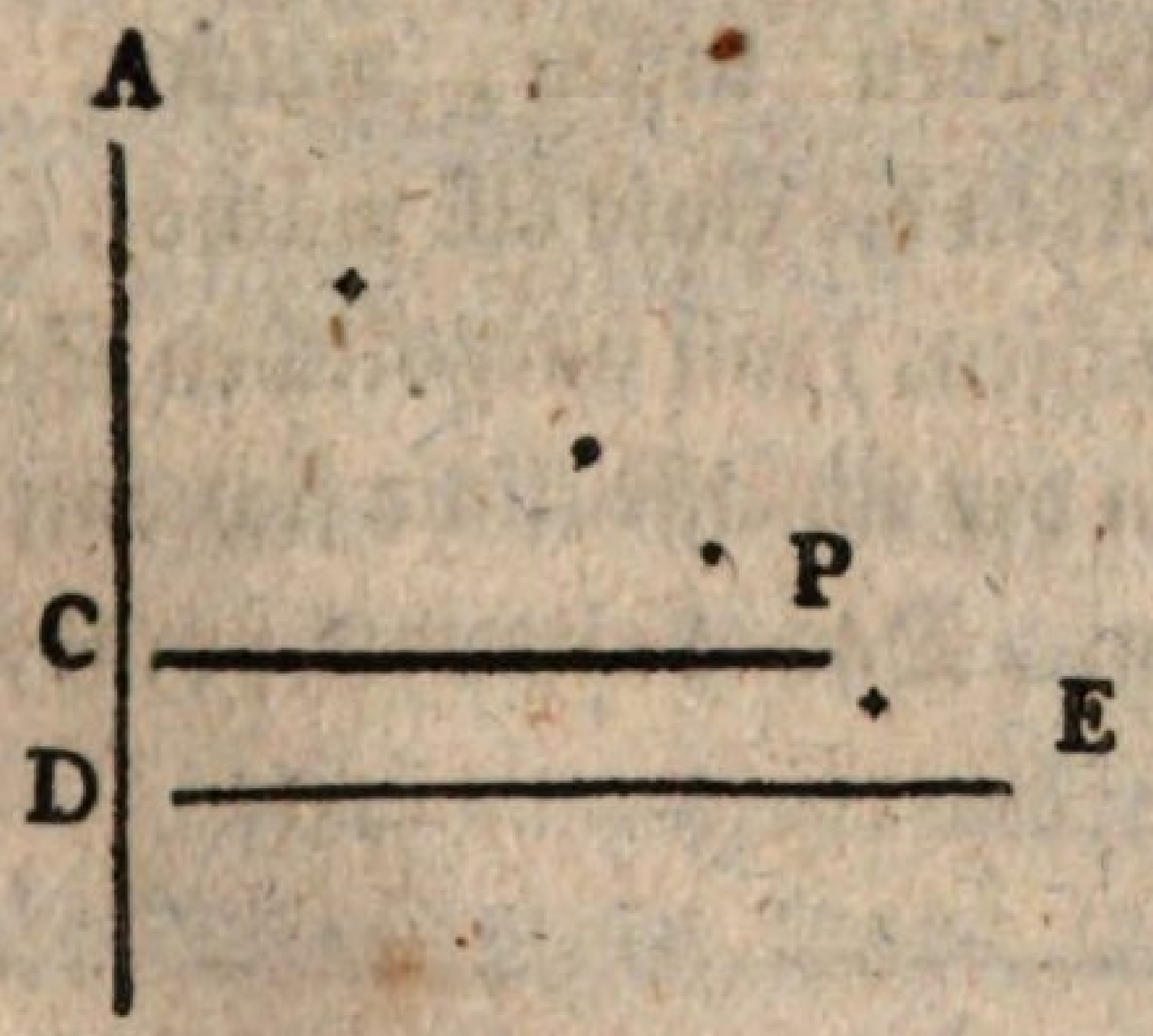
Man

Man zeichne eine Linie AD, und denke sie sich = 1, (von der Länge eines Zolls,)

sezze eine andre CP, grösser *) als AC, sonst von willkürlicher Länge, an ihr eines Ende rechtwinklicht an;

verlängre darauf AC bis sie der Linie CP gleich werde: AD = CP; und vollende darauf die Construction eines rechtwinkl. Dreiekks ADE, dessen Basis DE natürlich aus der Analogie folgt:

AC zu CP = AD zu DE



*) Wenn man nehmlich wachsende Ordinaten verlangt; verlangt man aber abnehmende, so wird CP kleiner als AC, und DE ebenfalls; aber DE kommt in diesem Fall als eine Paralele oberhalb CP zu stehen. Nach Durchlesung der nächsten Seite

wird

Wird CP mit x bezeichnet, so ist auch AD = x; der vorgeschriebenen Construction gemäs, und daher sicher gleichbedeutend mit obiger Proportion diese:

$$1 \text{ zu } x = x \text{ zu } xx.$$

Die Basis eines jeden so construirten Dreiekks heisse y; so sieht man ein, wie einer *einzelnen* Linie der Ausdrukk

$y = xx$; und ihrem Quadr. der: $y^2 = x^4$

zukommen könne; und nun gewiß ohne Mühe zugleich ein, wie sich unzälige Ordinaten auf ganz gleichförmige Art erzeugen, und eben damit sich Curven beschreiben lassen, welche, so wie bei grössern Dreiekken die Linie DE wächst, (und DE kann immerfort wachsen,) mit unendlichen Schenkeln, immer weiter von der Abscissenlinie sich entfernend, fortlaufen müssen. Das Kriterion parabolischer Curven

---

wird jeder Anfänger schon sich selbst hierbei zu helfen wissen. Dieses ganze Blatt ist blos für angehende Liebhaber von Geometrie geschrieben, um ihrer Phantasie einen Stoff unterzulegen, der ihnen vielleicht bei der ersten Ansicht der Gleichung

$$y^2 = x^4$$

fehlen möchte.

ven ist damit offenbar vorhanden. — Newtons Formel giebt nun ihre Quadratur, und niemand kann an ihrer Evidenz nach den gegebenen Prämissen wol weiter zweifeln.

Ein anderes Beispiel, welches Newton hierauf giebt, heißt so:

Wenn die Ordinate $y = \sqrt[3]{x^5}$ gilt; so beträgt die Fläche unter der Curve, oder AMP $= \frac{3}{8} . \sqrt[3]{x^8}$.

Die erste Frage hiebei ist wol die: Wie kann man sich eine Linie vorstellen, welcher die Grösе $\sqrt[3]{x^5}$ zukommen möchte? oder wie gelangt man nur zu einer solchen Ordinate?

1) Man denke sich die Abscisse, x, (welche gegeben sei,) als eine Linie, welche in 8, oder in 27 gleiche Theile eingetheilt wäre; so ist also auch ein Stükkchen dieser Linie, das 2 oder 3 solcher Theile hält, gegeben; und also ist mit einer Länge = x, allemal auch eine Länge $= \sqrt[3]{x}$ gegeben, weil $\sqrt[3]{27} = 3$ beträgt. (Der Schluß auf andere Grösen ist leicht.)

2) Diese zwo linearische gegebene Grösen reichen zu folgender leichten geometrischen Con-

struction zu, welche darauf hinführt, die verlangte Ordinate dem Auge darzustellen:

Nach den Elementen der Geometrie läßt sich allemal zu 3 gegebenen Linien eine 4te Proportionale finden. In zwei ähnlichen Dreiekken ist dieselbe ja allemal vorhanden. (S. Kästn. Geom. 30. Saz.) Darnach zeichne man nun zu

$$\sqrt[3]{x} : x = x : \text{die vierte};$$

Die 3 erste Glieder sind offenbar nach Nro. 1. gegebene Linien; also auch das 4te Glied. Dieses ist aber

$$(x^2 : x^{\frac{1}{3}}); \text{ d. i. } x^{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}; \text{ oder } x^{\frac{5}{3}};$$

und eben soviel ist ja $\sqrt[3]{x^5} = y$. Folglich ist die Ordinate damit dem Auge allemal leicht darzustellen.

Die Quadratur der Fläche unter der Curve, (welche sich jedesmal wol zeichnen läßt, wenn man nur mehrere wachsende Ordinaten aufrichtet,) ergiebt sich hierauf aus der Formel

$$a\left(\frac{n}{m+n}\right). x^{\frac{m+n}{n}}; \quad \text{hier}$$

$$= \frac{3}{5+3} . 1 . x^{\frac{8}{3}};$$

Das

Das heißt:

Z ist hier $\frac{3}{8} . x^{\frac{8}{3}}$.

§. 11.

Es erfordert nun wol kein sehr angestrengtes Nachdenken, um einzusehen, wie sich jeder unzälige parabolische Curven auf die mannigfaltigste Art bilden, und die Flächen unter ihnen quadriren könne.

Die Newtonische Formeln halten aber auch weiter selbst die Probe aus, wenn man Abscissen mit solchen Ordinaten annimmt, welche gar keine Curven geben. Man denke sich z. B. eine Reihe gleichseitiger Dreiekke mit wachsenden Flächengehalten. Deren Grundlinien seien als Abscissen angesehen, die Perpendikel darinnen als Ordinaten; so hat hiebei die allgemeine Gleichung statt:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Zu folgenden 3 Abscissen: $\frac{1}{2}$; 1; 2; gehören

die drei Ordinaten: $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$;

und die 3 quadrirte Flächen:

$$\frac{\sqrt{3}}{16};\ \frac{\sqrt{3}}{4};\ \sqrt{3}.$$

Denn im ersten Fall ist

$$a.x^{\frac{m}{n}} = y,$$ soviel als

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1}} = y;$$ (die Ord. $\frac{\sqrt{3}}{4}$;)

und aus der Quadratur-Formel

$$\left(\frac{n}{m+n}\right).a.x^{\frac{m+n}{n}};$$ wird

$$\left(\frac{1}{1+1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+1}{1}};$$ das ist:

$$\tfrac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{2};$$ oder $\frac{\sqrt{3}}{16}$;

Im 2ten Fall gehört zusammen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.(1)^{\frac{1}{1}} = y;$$ als Ordinate, und

$$\left(\frac{1}{1+1}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}.(1)^{\frac{2}{1}} = \tfrac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.1^{2};$$

das

das ist: $\frac{\sqrt{3}}{4}$, als Betrag der quadrirten Fläche.

Im 3ten Fall

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2)^{\frac{1}{1}} = y$; so viel, als $\sqrt{3}$, die Ordin.;

und $\left(\frac{1}{1+1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2)^2$;

d. i. $\sqrt{3}$;

als Betrag der Fläche.

Eben diese Flächen findet und kennt man schon, nach den ersten Elementen der Geometrie, wenn man die Flächen solcher drei gleichseitigen Dreiekke, aus Grundlinie und Höhe, berechnet.

Das bekannteste ist das mittlere, mit der Grundlinie = 1, Höhe = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dessen Innhalt ist notorisch = $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Die Innhalte der zwei übrigen folgen aus der leichtesten Analogie, und sind $\frac{\sqrt{3}}{16}$; und $\sqrt{3}$.

Daß übrigens die Ordinaten keine Curve geben, erhellt schon aus der Fundamental-Gleichung

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x = y,$$

in der die Grösen nicht über die erste Dimension hinauf steigen, so daß also das Kriterion, (daß blos gerade Linien einer solchen Gleichung correspondiren,) vorhanden ist.

Anstatt gleichseitiger Dreiekke kann man auch eine Reihe anderer ähnlicher Dreiekke wählen, und sich so durch unzälige Proben von der Ausdehnung und Sicherheit der Newtonischen Formel überzeugen. Natürlich ist blos jederzeit nöthig, das Grösen-Verhältnis zwischen Grundlinie und Höhe zu kennen, d. i. man mus die eine in den Ausdrukk der andern versezzen können.

Und somit erhellet, daß Newtons Formel selbst die Quadratur eines jeden geradlinigten Dreiekks unter sich begreiffe, und notwendig geht damit der Gedanke hervor:

„daß Triangular-Quadraturen nur als eine „einzelne Gattuug unter ein unendlich gro„ses Quadratur-Geschlecht gehören, „und blos der Leichtigkeit der Construction „wegen,

„wegen, vor andern gelehrt und benüzt „werden.„

§ 12.

Der analytische Geometer wird vermittelst dieser Betrachtungen auf eine Aussicht erhoben, die ihm ein Feld von unermeßlichem Umfang öfnet, das dem gemeinen Meßkünstler ewig verborgen bleibt, und selbst den scharfsinnigsten Geometern der vorigen Jahrhunderte in dichtem Nebel verhüllt, beinahe ganz verstekt geblieben war. Der Blik des Forschers kreist in neuen Regionen umher, und weidet sich an Gestalten, deren Bildung sich in ewiger Mannigfaltigkeit ändert, die ihn aber nun nicht mehr irren, die sein Geist jezt zu ordnen, und in ihren Verhältnissen zu beurtheilen versteht! Welche reiche Fülle von Beschäftigungen, deren Unterhaltung nie versiegen kann! —

Wenn man hiegegen wieder auf unsere gewöhnliche fragmentarische Geometrie zurückschaut, und betrachtet, daß die allermeisten jezt lebenden Geometer gar keine Begriffe zulassen, wodurch sie sich nur von der Möglichkeit überzeugen könnten, daß es unzälige Quadraturen, die über die ihnen bekannte hinausgehen, geben

 möchte,

möchte, — — betrachtet, wie oft sie in ihrer Ideenbeschränktheit besserer Aufklärung Hohn sprechen, und die wahre Existenz der erhabensten Entdekkungen selbst im Ernst bezweifeln; — o wen möchte nicht darüber eine Lust anwandeln, Juvenals Geisel zu ergreifen, oder doch — durch eine kleine Declamation seinem Herzen manchmal Luft zu machen! —

Ich will dieselbe bis auf einen geringen Theil unterdrükken, dem in einer Note *) ein Plaz

*) . . . Unsre Meßkünstler in Deutschland (und die in andern Reichen sind ihnen darinn nicht ungleich,) kennen äusserst selten mehr, als Kreisrechnung, und auch die nur sehr fragmentarisch; über den Zirkel hinaus wagen sich die wenigsten; auch Geometer, die ihren Unterhalt aus Meßkunst ziehen, und auch etwas von Buchstaben-Rechnung und Trigonometrie gelernt haben, beschränken sich auf Kreisabschnittberechnung nach mechanischer Art; wenn's hoch komme, nach etlichen Formeln, mit Gebrauch der trigonometr. Tafeln, um durch Decimalen einige Näherung zu erhalten. Zehn- bis zwölftausend Jünglinge hören jährlich auf Akademien Collegien über reine und angewendete Mathematik, und, wenn sie von den Akademien zurükkommen, — nicht hundert, nicht fünfzig, sind unter denselben soviel culti-

Plaz verstattet seyn mag, und die Erörterungen meines ins Auge einmal genommenen Gegenstandes in Ruhe zu verfolgen, mir vornehmen.

§. 13.

---

cultivirt, daß sie von Kreisrechnung richtig urtheilen, und von den Curven, welche die Schnitte eines Conus ausgeben, sich schiklich ausdrükken, oder auf Verlangen Erläuterung geben könnten. Und doch bringt es der Stand unsrer Cultur mit sich, und macht es augenscheinlich immer mehr zum Bedürfnis, daß hierüber allgemeinere Auskunft gegeben werde, und Aufklärung sich verbreite. Sie wird gefordert; es fehlt nicht an Fragenden, bei tausend zufälligen Anlässen, im Umgang, in gebildeten Gesellschaften, in Besprechung mit Handwerkern; — und wo sind die, die antworten? und wie klingen ihre Erwiederungen? — —

Ich will diese hier nicht in grosem Umfang wiederholen; aber nichts ist doch gemeiner als Aeusserungen ohngefähr von dem Schlag zu hören: „So „lange die Quadratur des Zirkels nicht erfunden sei, „könne man mit allen Flächen, welche mit Bogen„linien begrenzt seien, nicht recht fertig werden; „und es sei eine mühsame Grübelei ohne Nuzzen „und Frommen, und nur Zeitverderb, sich viel da„mit abzugeben." — Die Zusäzze und Spöttereien, und Machtsprüche, welche solchen Reden beigefügt werden, kann wol jeder Leser an dem Ort, wo er

 wohnt,

§. 13.

Sobald Ordinaten-Gleichungen mit bejahten Exponenten aller Arten, und die dazu gehörige Qua-

---

wohnt, in gehörigen Modificationen bestimmter hören, und genüglich erfaren. — Daß sich Flächen *unter* parabolischen Curven quadriren lassen, ist den meisten Rednern der erwähnten Gattung unbekannt, oder unglaublich; und wenn auch einige Halbwisser etwas von der Parabel des Apollonius gehört haben, (etwa bei gelegentlichen Besprechungen über Bombenwürfe, Springbronnen u. d. m.) so ist doch der Weg von der Vorstellung einer Parabel überhaupt bis zu der Ueberzeugung von der Quadrabilität parabolischer Flächen so weit, daß die Wenigsten ihn zu gehen sich entschliessen mögen. Allein selbst die Einsicht von der Quadratur einer Fläche, die durch eine Parabel des ersten Geschlechts begrenzt wird, wenn sie auch einzeln erlangt, und ins Auge gefaßt wird, ist doch in der That noch sehr eingeschränkt. Der Anfänger in höherer Geometrie kommt dazu, wie zu einer Ausnahme, und behält die Behauptung:

„Die Fläche unter der Curve einer Parabel,
„bei welcher $yy = ax$, beträgt zwei Drittheile
„des Rechteks, das die Abscisse und Ordinate
„miteinander geben,“

als etwas ganz sonderbares im Gedächtnis! Es ist

ihm

Quadratur-Formeln verglichen, und ins reine gebracht waren, so konnte die Neugier, auch verneinte Exponenten anzunehmen, und nach den daraus fließenden Folgen zu fragen, schwerlich lange mehr unterdrükt werden. Nehmlich Newton dachte sich bei der Gleichung

$$y = a . x^{\frac{m}{n}}$$

einmal n = 1; und m = — 1; alsdenn m = — 2; und so weiter; folglich

$$y = a . x^{-\frac{1}{1}}, \text{ oder } a . x^{-1};$$

$$y = a . x^{-\frac{2}{1}}, \text{ oder } a . x^{-2};$$

und

---

ihm damit ein einzelnes merkwürdiges Phänomen in Meßkunde vorgekommen, von dem er nicht weis, wo er es hinbeziehen, ordnen, und in Vergleichung anwenden soll. Welche grose lang und tief erweiterte Aussicht hat dagegen der erlangt, der eine Reihe fortgehender Geschlechter von Parabeln sich vorstellt, über die ganze grose Familie hinblikt, und von der Quadratur aller unter solchen verwandten Curven liegenden Flächen, aus statthaften Gründen überzeugt ist! Die Ausdehnung geht aber noch weiter! (Siehe S. 124. 125.)

und alsdann auch umgewendet: $n = -2$; $m = 1$; also:

$$y = a \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Der Ordinaten-Gleichung:

$$y = a \cdot x^{-1}, \text{ oder } = \frac{a}{x};$$

correspondiret die Quadratur:

$$Z = \tfrac{1}{0} \text{ oder } \infty;$$

Denn bei $n = 1$; $m = -1$; wird $\frac{n}{m+n}$ in $\frac{1}{-1+1}$, das ist, in $\frac{1}{0}$ verwandelt, und $\frac{m+n}{n}$ daher in $\frac{0}{1}$, oder schlechthin in o. Deshalb dann in Quadratur sich ergeben mus:

$$\left(\frac{1}{-1+1}\right) a \cdot x^{\frac{0}{1}};$$

das ist: $\frac{1}{0} \cdot a \cdot x^0$; oder

$$\frac{a \cdot x^0}{0} = \infty \cdot a,$$

welches auf einen unendlichen Raum deutet, der natürlich über alle Quadratur hinausgeht, und

also

also auf hyberbolische Flächen, welche zwischen Asymptoten ins unendliche fortlaufeu, führt.

Die Ordinaten-Gleichung

$$y = a . x^{-2}, \text{ oder } = \frac{a}{xx},$$

führt auf die Quadraturformel: $- [a , x^{-1}]$. Denn der Exponent -2 ist $= \frac{m}{n}$, wenn $m = -2$, und $n = 1$ gedacht wird, weil ja $-\frac{2}{1} = -2$ ist. Weiter aber wird hierauf $\frac{n}{n+m} = \frac{1}{1-2}$, und $\frac{n+m}{n}$ wird $= \frac{1-2}{1}$.

Daher die Quadratur sich ergiebt:

$$Z = \frac{1}{1-2} . a . x^{\frac{1-2}{1}}; \text{ das ist:}$$

$$Z = \frac{1}{-1} . a . x^{-1} = -\frac{a}{x}.$$

Hiemit ergiebt sich eine verneinte Fläche. Was man sich darunter bestimmt und deutlich zu denken habe, war anfangs wol für jeden, welchem die Rechnung eine solche Formel auswarf, dunkel und problematisch. Daß die Fläche imaginär, oder gar nicht vorhanden wäre, ließ

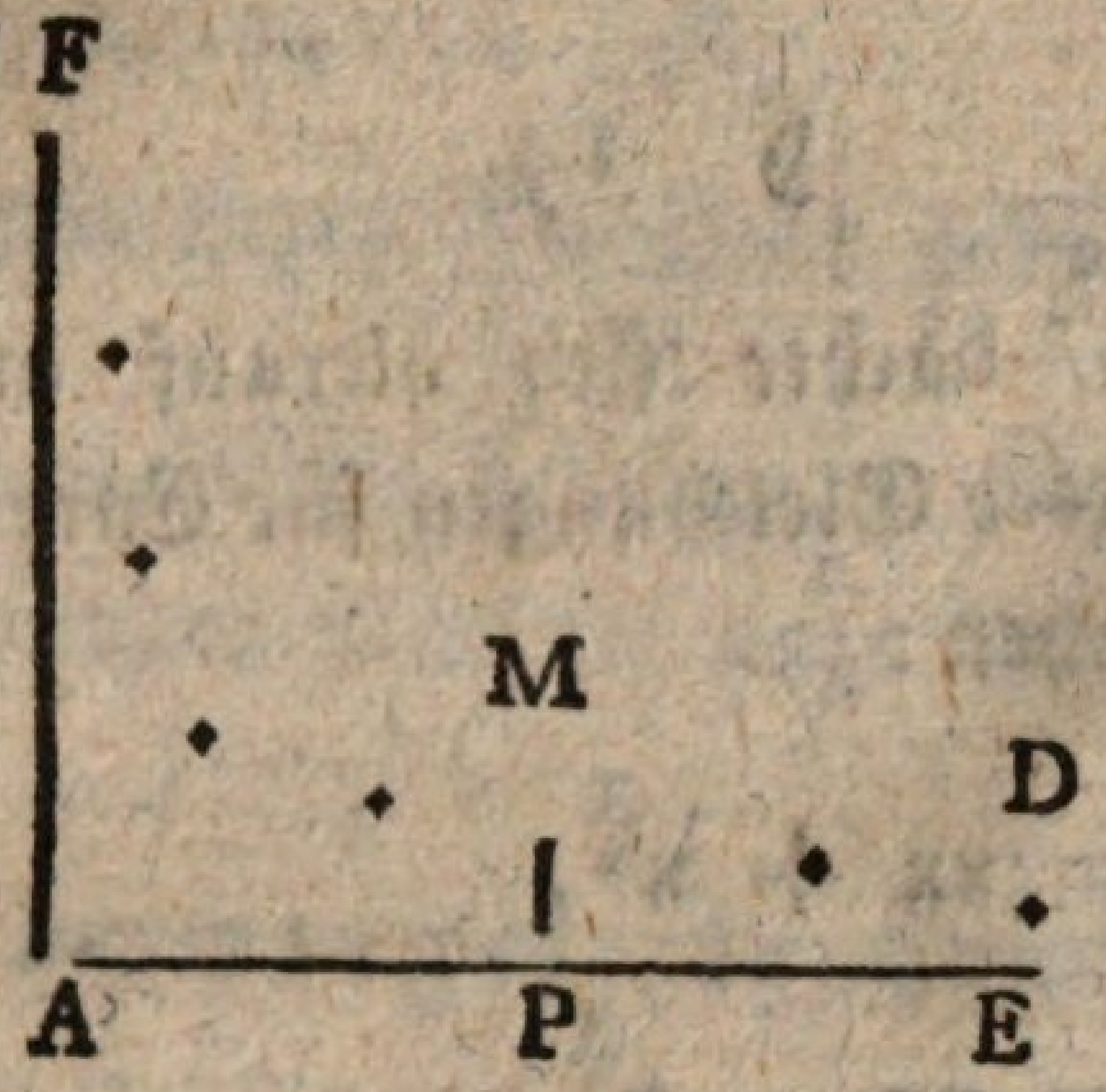
sich

sich nicht vermuthen, noch aus analogischen Schlüssen annehmen. Durch wiederholtes Ueberdenken gelangte man aber doch bald zu der Ueberzeugung, daß die zu quadrirende Fläche wol nicht an der Ordinate und Absciſſe, welche in der Ordinaten-Gleichung angenommen sind, so wie in andern bisher gewohnten Fällen, *hin*liegen könne, sondern daß die Fläche, *welche* die Quadraturformel verneint ausgebe, auf der entgegengesezten Seite der Ordinate, oder jenseits des gewöhnlichen PM, zu denken seyn müsse.

Da $-[a.x^{-1}]$, oder $-\frac{a}{x}$, mit wachsenden Absciſſen gewiß eine immer kleinere Fläche andeutet, (indem gröſſere, und immer gröſſere Nenner in allen Brüchen, unleugbar Brüche von immer abnehmenden kleinern Gehalten geben,) so lag die Anwendung auf hyperbolische Flächen, welche sich zwischen Hyperbel-Curven und deren Asymptoten immer kleiner und kleiner zeigen, ganz nahe, und man sahe daher auf dieses hin ein, daß bei der angenommenen Ordinaten-Gleichung $y = a.x^{-2}$, wenn man in einer Figur $x = AP$, und $PM = y$ denkt, die zur Quadrirung bestimmte Fläche nicht zwischen AF

und

und APM, sondern jenseits PM gegen DE zu liegen müsse.



Und hieraus folgte dann, daß die Newtonische Formel neben der Quadratur parabolischer Flächen auch die der Hyperbel, und zwar ebenfalls von Hyperbeln unzäliger Geschlechter unter sich begreiffe.

Newton selbst hat sich hierüber sehr kurz, und in der That nicht belehrend genug erklärt, jedoch immer so, daß am Tage liegt, er habe wol verstanden, worauf die Quadraturformel mit verneinten Grösen hinausweise, und daß wirklich die Quadraturen hyperbolischer Flächen hierher gehören.

Wer umständlichere Erläuterungen über diese Combinationen verlangt, muß dieselbe in Eulers Kar-

Karstens und Kästners Schriften, welche hierüber genügende Auskunft geben, aufsuchen.

§ 14.

Newton dachte sich hierauf auch weiter zusammengesetztere Gleichungen für Curven, welche z. B. so aussähen:

$$y = xx + x^{\frac{3}{2}},$$

oder $y = xx - x^{\frac{3}{2}}$,

und zeigte, daß, wenn nach deren Quadraturen gefragt würde, die als richtig bewiesene Regel, nehmlich

$$z = a\left(\frac{m}{m+n}\right).x^{\frac{m+n}{n}}$$

auch dabei zum Ziel führe, indem blos nöthig sei, sie von Glied zu Glied anzuwenden, und die Quadraturformel, welche z. B. zu der Ordinaten-Gleichung $y = x^2$ gehöre, zu der, welche zur Ordinaten-Gleichung $y = x^{\frac{3}{2}}$ gehöre, zu addiren, oder diese von jener abzuziehen, so daß also zu

$y = x^2 + x^{\frac{3}{2}}$, die Quadratur:

$Z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$,

zu

zu $y = x^2 - x^{\frac{3}{2}}$, aber die Quadratur:

$$Z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

nach gleichförmigem Verfaren gehörte.

Newton nannte Curven, welchen Ordinaten-Gleichungen von der angeführten Gestalt zukämen:

zusammengesezte Curven,

im Gegensaz gegen die, deren Ordinaten-Gleichung $y = ax$, oder $a \cdot x^n$ seie, welche er

einfache Curven

nannte.

Wenn in den Ordinaten-Gleichungen x mit verneinten Exponenten vorkommt, z. B. wenn eine heißt:

$$x^2 + x^{-2} = y;$$

so giebt die Quadratur zwei Flächen, welche zu beeden Seiten der Ordinate liegen, und durch sie gleichsam abgesondert werden.

Es liegt ausser meinem Ziel, mich hiebei mit umständlichern Auseinandersezzungen zu verweilen. Aus dem wenigen, was angeführt worden,

erhellet aber doch wol so viel zur Genüge, daß die Anzahl zusammengesezter Curven sich nicht übersehen, noch gedenken lasse, welche alle also Newton der Quadratur unterworfen hat.

§. 15.

Wenn die Ordinaten-Gleichung mehrere Grösen, als nur Potenzen von x befaßt, auch wol aus mehr Factoren, als z. B. ax^n bestehet, so reichen die angegebenen zwei Regeln, nicht schlechthin zu, um die Quadratur darzulegen. Dieß sahe Newton ohne Zweifel sogleich ein, z. B. wenn

$$y = \frac{aa}{b + x}; \text{ oder } y = \sqrt{(aa - xx)}$$

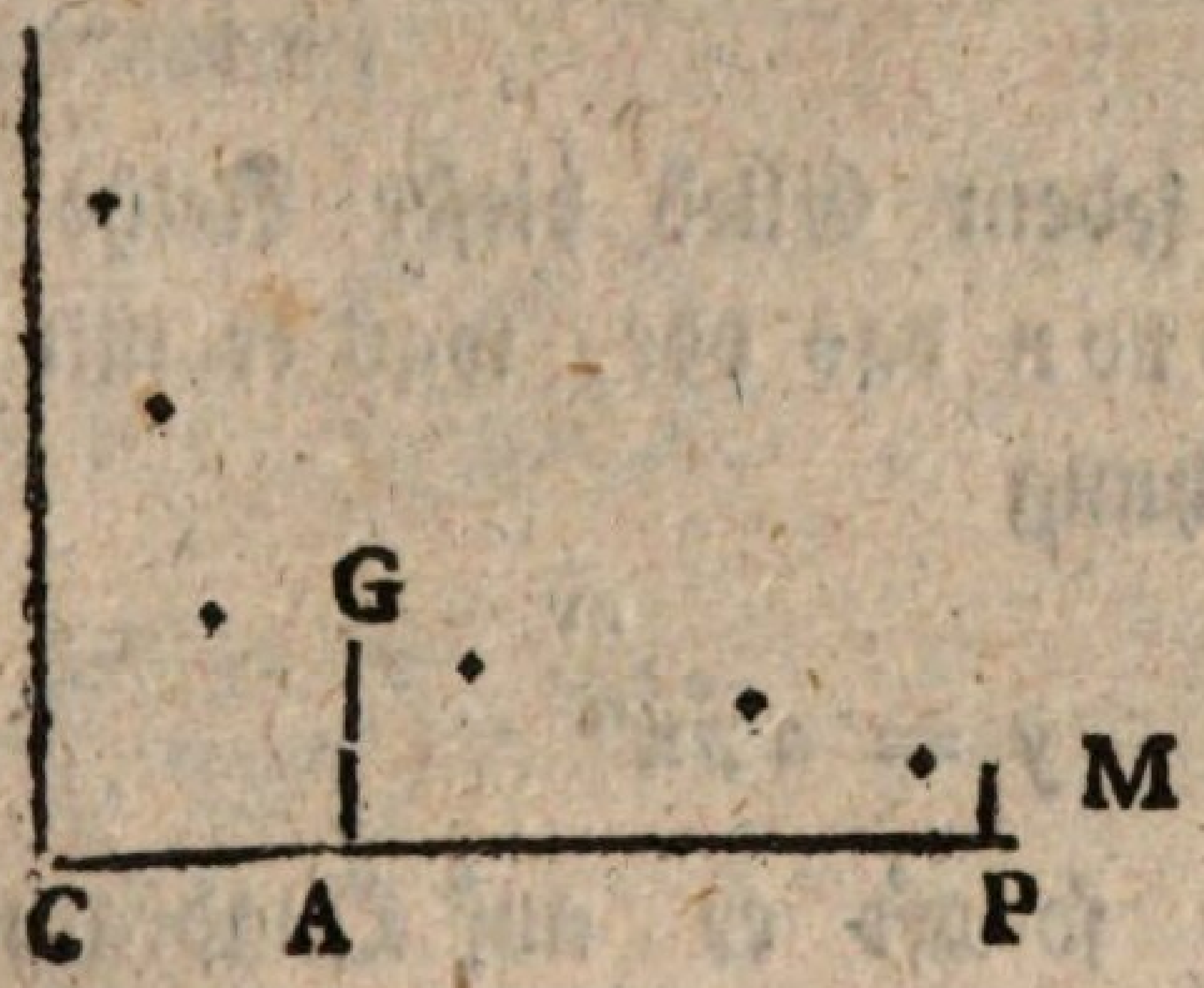
als Ordinaten-Gleichung vorgegeben wird. Aber er merkte doch bald, daß nur eine Vorbereitung und Umwandlung dieser Grösen in Reihen erforderlich sei, um seine Fundamental-Quadratur-Formel wieder anbringen, und vermittelst derselben abermals quadrirte Flächen liefern zu können.

Die erste der angeführten Ordinaten-Gleichungen ist die

an der Hyperbel, zwischen ihren Asymptoten,

welche

welche aus jedem Lehrbüch höherer Mathematik bekannt ist. Nehmlich die Potenz der Hyperbel wird $aa = (b + x) . y$ gedacht, indem man den Anfang der Abscissen nicht in den Mittelpunkt der Hyperbel, oder in den Winkelpunkt der Asymptoten sezt, sondern in einer gewissen Entfernung davon anlegt, welche leztere alsdann eine beständige Grösse $CA = b$ wird.



In der Figur wäre also

$$(CA + AP) PM . = aa$$

$$(b + x) . y = aa;$$

woraus die Ordinaten-Gleichung eben folgt:

$$y = \frac{aa}{b + x};$$

Um eine Quadratur hiebei zu Stande zu bringen, d. i. um zu erfaren, was in diesem

 Fall

Fall das allgemeine Integral $\int ydx$ bedeute, mus man das Aequivalent der Ordinate, den Bruch $\frac{aa}{b+x}$, durch Division in eine unendliche Reihe verwandeln, welche (nach bekanntem Verfaren) sich so zeigt:

$$= \left[\frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^2}{b^3}.x^2 - \frac{a^2}{b^4}.x^3 + - ..\right]$$

Mit jedem Glied dieser Reihe nimmt hierauf Newton das vor, was er mit der Ordinaten-Gleichung

$$y = a.x^{\frac{m}{n}}$$

vornahm, so oft er auf Quadratur ausgieng. Nehmlich aus

$$y = a.x^{\frac{m}{n}}$$

wird die Quadraturformel abgeleitet:

$$Z = a\left(\frac{n}{m+n}\right).x^{\frac{m+n}{n}}$$

und aus

$y = \frac{a^2}{b}$; oder $\left(\frac{a^2}{b}\right).x^{\frac{0}{1}}$; dem ersten Glied

Glied der vorgegebenen Reihe folgt die (einzelne) Quadratur:

$$Z = \frac{1}{0+1} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right) \cdot x^{\frac{0+1}{1}} \text{ d. i. } \frac{a^2}{b} x;$$

Gleichförmig aus

$$y = \frac{a^2}{b^2} \cdot x \text{ , od. } \frac{a^2}{b} \cdot x^{\frac{1}{1}},$$

folgt die Quadratur:

$$Z = \frac{1}{1+1} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^{\frac{1+1}{1}};$$

$$\text{d. i. } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^2;$$

welche Gröse aber verneint zu sezzen ist, weil das 2te Glied der vorgegebenen Reihe selbst verneint ist.

Hierauf schreitet man zum 3ten Glied, und denkt sich dabei

$$y = \frac{a^2}{b^3} \cdot x^{\frac{2}{1}};$$

Die correspondirende Quadratur wird:

$$Z = \frac{1}{2+1}\left(\frac{a^2}{b^3}\right) \cdot x^{\frac{2+1}{1}};$$

$$\text{d. i. } \tfrac{1}{3} \cdot \left(\frac{a^2}{b^3}\right) \cdot x^3;$$

und bleibt bejaht, weil das 3te Glied bejaht ist. Auf ganz gleiche Weise geht das Geschäft der Quadrirung fort; das 4te Glied wird wieder verneint; das fünfte bejaht, u. s. f.

Endlich stellt man die einzelne Resultate der Quadraturen zusammen, und erhält damit die verlangte Quadratur des hyperbolischen Flächenraums selbst:

$$Z = \frac{a^2}{b}x - \frac{a^2}{2b^2}x^2 + \frac{a^2}{3b^3}x^3 - \ldots + \ldots$$

Soviel beträgt nun die Fläche in der Figur APGM zwischen der Asymptote, nnd Curve, in Näherung; welche man leichtbegreiflich durch Fortsezzung der Glieder, so weit treiben kann, als man Lust dazu hat.

Newton leistet durch Anwendung seiner Haupt-Quadraturformel hiemit ebendas, was man

man durch Differentiirung und Integrirung nach Leibnizischer Weise zu Stande bringt. Denn schon aus Wolfs Anfangsgründen ist bekannt, daß man, um aus der Ordinaten-Gleichung

$$y = \frac{aa}{b+x}$$

die Quadratur abzuleiten, die durch Division erhaltene unendliche Reihe, (die wir S. 26. gesezt haben,) differentiiren, und hierauf Glied für Glied integriren müsse:

$$\left[\frac{a^2}{b}.dx - \frac{a^2}{b^2}xdx + \frac{a^2}{b^3}x^2dx - ..\right]$$

giebt ganz eben so viel aus, wenn man sich an die oben mehrmals angeführte Integral-Formel:

$$\int[b.x^{m-1}dx] = \frac{1}{m}.b.x^m$$

genau hält, und ihr gemäs jedes einzelne Glied integrirt, ganz eben soviel, als wir vermittelst der Newton. Formel gefunden haben, nehmlich

$$z = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{2b^2}x + \frac{a^2}{3b^3}x^2 - \ldots$$

Newtons Methode verbirgt (wie damit wol jedermann einleuchtend ist,) alle Signaturen, wie dx, oder $\dot{x}$, die beim Differentiiren, und $\int$ beim Integriren jederzeit gebraucht werden; blos durch Anwendung der in gemeiner Algebra gewöhnlichen Zeichen wird, (wenn man ihm folgt,) die Quadratur vollendet; und folglich wird *auf* diesem Weg eine Anstößigkeit umgangen, *welche* seit 100 Jahren viele tausend Geometer geirrt, und geärgert hat. Allein, in der Nähe betrachtet, ist dennoch Differentiation und Integration bei diesem Benehmen blos versteckt, und gleichsam aus den Augen geschoben, nicht gar beseitiget, oder als überflüssig verabschiedet. Denn die Haupt-Quadraturformel:

$$z = a\left(\frac{n}{m+n}\right).x^{\frac{m+n}{n}}$$

läßt sich doch nicht ohne Kenntnisse von Fluxionen- oder Differentialrechnung, und ohne deren Anwendung, beweisen; die gemeine Algebra, oder Analysis, reicht ein für allemal nicht zu, um eben dieses Fundament zu legen, und auf dasselbe sind doch allein nachher von Newton so viele Quadrirungen, (und nahmentlich alles, was wir bisher von Quadraturen deducirt haben,) gebaut worden.

Eben

Eben dieses gilt von der Quadratur des Kreises, insofern solche ebenfalls nach Newtons Angabe vermittelst der oft angeführten Formel in Näherung ausgedrükkt wird. Man sehe sogleich den Weg, welchen er genommen, um damit ins reine zu kommen, an:

§. 16.

Zuerst denke man sich einen Kreis mit einem Halbmesser, welcher = a sei. Die Ordinaten-Gleichung wird

$$y = \sqrt[2]{[(a+x).(a-x)]} \text{ oder}$$
$$\sqrt{(aa-xx)}.$$

heissen, (vergl. mit §. 9. der Isten Abhandlung S. 47.) Durch Anwendung des binomischen Lehrsazzes läßt sich diese Gröse

$$\sqrt{(aa-xx)}, \text{ oder } (aa-xx)^{\frac{1}{2}},$$

in einer unendlichen Reihe darstellen, welche (wie in den vorhergehenden Blättern gezeigt worden,)

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \ldots$$

heissen mus. Anstatt diese Reihe Glied für Glied zu differentiiren, und hierauf zu integriren,

(nach der Weise, wie oben S. 54. 55; auch S. 72. angegeben worden,) wendet Newton wieder seine Hauptformel so an, daß er

1) beim ersten Glied

$y = a$ sich $= a \cdot x^0$, oder $a \cdot x^{\frac{0}{1}}$

vorstellt, indem ihm $m = 0$; $n = 1$ *gilt, und* erhält damit

$$Z = \frac{1}{0+1} \cdot a \cdot x^{\frac{0+1}{1}}; \text{ das ist:}$$

$$= 1 \cdot a \cdot x^1, \text{ oder } ax;$$

2) Beim 2ten Glied schreibt er

für $y = \frac{x^2}{2a}$, so: $\frac{1}{2a} \cdot x^{\frac{2}{1}}$,

so daß ihm $m = 2$, $n = 1$ gilt; daher ihm aus $\frac{n}{m+n}$ wird $\frac{1}{2+1}$, und $\frac{m+n}{n} = \frac{2+1}{1}$ d. i. 3.

Folglich

$$Z = \frac{1}{2+1} \cdot \left(\frac{1}{2a}\right) \cdot x^3; \text{ das ist:}$$

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{a} = \frac{x^3}{6a};$$

zum

zum Vorschein kommt; aber verneint gesezzt werden mus, weil das 2te Glied selbst verneint in der Ordinaten-Gleichung steht.

Das Verfaren mit dem 3ten Glied, geht auf ganz gleichförmige Weise von statten:

Aus $y = \frac{x^4}{8a^3} = \left(\frac{1}{8a^3}\right) \cdot x^{\frac{4}{1}}$;

wird $Z = \frac{1}{4+1} \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot a^3}\right) \cdot x^{\frac{5}{1}}$;

d. i. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{x^5}{a^3}$;

welche Gröse abermals verneint zu schreiben ist, so wie jede folgende, weil alle Glieder der unendlichen Reihe, welche die Ordinaten-Gleichung darstellt, fort und fort verneint sind.

Sammelt man nunmehr die einzelnen Gleichungen zu Z, und stellt sie neben einander, so ergiebt sich die

quadrirte Kreisstükk-Fläche

$$= ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{x^5}{5 \cdot 8 \cdot a^3} - \frac{x^7}{7 \cdot 16\, a^5} - \ldots$$

womit sich eben die Reihe zeigt, welche wir bereits

reits oben S. 75. angegeben, und welche auch Newton Leibnizen (nach S. 19.) mitgetheilt hat, ohne ihm jedoch diese Methode der Auflösung damals zu eröfnen, welche uns jezt, da wir die Anwendung seiner Quadraturformel kennen, zur Genüge bekannt ist.

§. 17.

Die allgemeine Gestalt unserer bisher so oft gebrauchten Fundamental-Formel ändert sich nicht blos in Zalen, sondern auch in Buchstaben auf mehr als eine Art, wenn man für m und n verschiedene Werthe einsezt. Hierüber ist es doch wol nicht überflüssig, noch Beispiele beizubringen.

Man denke sich anstatt des Bruchs $\frac{m+n}{n}$ eine Grösse $= \eta$; so wird natürlich

$$\frac{n}{m+n} = \frac{1}{\eta};$$

und anstatt des Exponenten in der Ordinaten-Gleichung $\frac{m}{n}$, wird man $\eta - 1$ erhalten *).

Daher

---

*) Denn man denke nur $\eta = \frac{m+n}{n}$, in der Gestalt:

$= [$

Daher werden, den obigen Vorträgen gemäs, allerdings zusammen gehören:

Die Ordinaten-Gleichung: $ax^{\eta - 1}$

und die Quadratur: $\frac{1}{\eta} . a . x^{\eta}$;

In andern Abhandlungen Newtons bringt er öfters die Gleichungen

$$\eta = d . Z^{\eta - 1} ;$$

und $t = \frac{1}{\eta} d . Z^{\eta}$;

vor,

$= \left[\frac{m}{n} + 1\right]$; welches doch gewiß angeht, wie in allen Elementen der Buchstabenrechnung vorkommt; so wird man sogleich eingestehen müssen, daß $\eta - 1 = \frac{m}{n} + 1 - 1$ d. h. $= \frac{m}{n}$ betragen müsse.

vor, welche man nun wol verſtehen wird, inſoferne uns nehmlich die Beziehungen auf die Formeln, in denen $\frac{m+n}{n}$ ſelbſt vorkommt, nicht mehr fremd ſeyn können. Newton ſelbſt iſt ſehr ſparſam in Worten, und führt die umgewandelte Formeln an, ohne auf die, welche er in ſeiner oft bemeldten Diatribe (von 1669) braucht, (und welche wir ebenfalls von §. 2. bis 15. dieſer Abhandlung gebraucht haben,) beſtimmt zurük zu weiſen.

Es können aber auch Fälle vorkommen, in welchen die Ordinaten = Gleichung

$$y = a \,.\, x^{\frac{m}{n}} \text{ heißt;}$$

die Quadratur aber ſo ausſieht:

$$Z = \frac{1}{m} \,.\, a \,.\, x^{m}; \text{ oder } = \frac{1}{2m} \,.\, a \,.\, x^{2m};$$

$$\text{oder } = \frac{1}{dm} \,.\, a \,.\, x^{dm};$$

Aber eine Quadratur von dieſer einfachen Darſtellung kann ausſchließlich und allein nur in der Vorausſezzung eintretten, wenn man m+n durch ein Product von drei Factoren, welches

dmn

dmn heißt, ausdrükken kann, welches freilich allemal angeht, so oft man nur die zwo Grösen d und (mn) in Concreto kennt. Ist nehmlich eine solche Gröse in $\frac{m+n}{n}$ vorhanden, so wird ebensoviel $\frac{d.mn}{n}$, das ist dm bedeuten; aus

$$\frac{n}{m+n} \text{ aber wird } \frac{n}{d.mn}; \text{ d. i. } \frac{1}{d.m}$$

werden; und daher allerdings die Quadratur-Formel

$$Z = \frac{1}{d.m} . a.x^{dm}$$

hervorgehen.

Das ist hiebei ohne beschwerliche Uebersicht leicht abzunehmen, daß d meistens, wenn es in diesen Formeln vorkommt, auf eine gebrochene Zal in Concreto deuten mus. So kann d nur in dem Fall = 1 bedeuten, wenn m+n = mn, und zugleich m = n gilt; daher da $\frac{m}{n} = 1$ wird;

und die Ordinaten-Gleichung: $y = a.x^1$,

mit der Quadratur: $Z = \frac{1}{m}.a.x^m$;

bei

bei dieser Annahme zusammen gehören *). So oft aber m und n selbst Brüche sind, so kann d wol eine ganze Zal bedeuten.

Z. B.

---

*) Man kann wol bei der Gleichung $m+n = M$, und $mn = N$, jede Zal sich denken; und bekanntlich läßt sich m uad n allemal einzeln finden, wenn nur ihr Product und ihre Summe M und N gegeben sind. (Die Auflösung des Theorems ist bekannt, und steht fast in allen Lehrbüchern.) Allein man kommt dabei in den meisten Fällen, wenn m nicht $= n$ ist, auf Irrationol-Grösen hinaus, so daß der Exponent in der Ordinaten-Gleichung $\frac{m}{n}$ selbst etwas irrationales enthalten müßte. Wann oder wo aber kämen wol Potenzen vor, deren Exponenten irrational wären? Man stelle sich als ein Beispiel $m+n = 7$, $mn = 9$ vor; so folgt daraus: $m = 7-n$; und $m = \frac{9}{n}$; Daher aber ferner $n^2 - 7n - 9 = 0$. Die Auflösung dieser unreinen quadratischen Gleichung giebt:

$$n = \tfrac{1}{2}(7 \pm \sqrt{13});$$

und ein kurzer Calkül zeigt, daß $\frac{m}{n}$ blos entweder $\frac{7+\sqrt{13}}{7-\sqrt{13}}$ oder $\frac{7-\sqrt{13}}{7+\sqrt{13}}$ heissen könne.

Z. B. $m+n$ sei $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$; also $= \frac{8}{15}$. Da ist $d.mn = d.\frac{1}{3}.\frac{1}{5}$; und d mus $= 8$ gelten; damit $d.mn = 8.(\frac{1}{3}.\frac{1}{5})$, d. i. $= \frac{8}{15}$ werde.

§. 18.

Wir haben bisher wol auf 20 Blättern uns mit Betrachtungen unterhalten, wie viele Quadraturen die allgemeine Formel

$$Z = \frac{1}{m} a . x^{m}$$

oder, was eben so viel bedeutet, die mit dem Factor $\frac{n}{m+n}$, und dem Exponenten $\frac{m-n}{n}$, unter sich begreife. Die Ausdehnnng des grosen Ordinaten-Geschlechts, welches allgemein durch

$$y = a . x^{m-1}, \text{ oder } a . x^{\frac{m}{n}}$$

angedeutet wird, liegt nun vor unsern Augen. Das Feld, voll von quadrablen Curven, reicht weiter, als menschliche Blikke tragen zu können scheinen. Wer möchte je uns alles anzugeben verstehen, was sich immer unter die oft angeführte Formeln reduciren läßt? — —

Und dennoch ist es sicher und gewiß, daß es viele Ordinaten-Gleichungen noch giebt, für welche der Umfang von

$$y = a . x^{m-1} , \text{ oder } a . x^{\frac{m}{n}}$$

wie auch die hiezu gehörige Quadratur-Regel zu enge ist.

Ob einem andern Mathematiker als Newton, die erwähnte Enge und Beschränkung der Formeln, welche uns bisher so vielfältig gedient haben, fühlbar war, weis ich nicht, und zweifle fast daran. Ihm, Newton, lag das Bedürfnis grösserer Ausdehnung bald an; ihn drang es bald, weiter zu forschen, und ein höheres Geschlecht auf zu suchen, unter welches selbst die (doch schon so viel umfassende) Ordinaten-Gleichung $y = a . x^{m-1}$ nur als Gattung gehörte; und auch für dieses höhere Geschlecht eine allgemeine Quadratur-Regel anzugeben, welche selbst unser wohlbekanntes

$$Z = \frac{1}{m} . a . x^{m}$$

unter sich begriffe, aber noch viele andere verwikkeltere Gleichungen, die quadrable Flächen angiengen, befaßte.

In

In dem IIten grossen Brief Newtons an Oldenburgen, welcher für Leibnizen bestimmt war, und von welchem wir (oben S. 12—22.) schon Auszüge geliefert haben, wird folgende Entdekkung mitgetheilt, und behauptet:

Wenn $dz^m . (e + f . z^n)^p = y$

eine Ordinaten-Gleichung (*) hiesse, und darinn z die Abscisse wäre, was sonst x genannt wird, daß sich die Fläche unter der Curve allemal quadriren lasse,

entweder vollkommen, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zal in Concreto bedeute,

oder in Näherung, durch eine unendlich-fortlaufende Reihe, so oft $\frac{m+1}{n}$ ein Bruch, oder eine verneinte Gröse in Concreto sei

(*) Ich habe blos einige griechische Buchstaben, deren sich Newton bediente, in lateinische bei diesen Formeln verwandelt. —

Es fällt in die Augen, daß $\frac{m+1}{n}$ aus den 2 Exponenten zu z, welche in der Ordinaten Gleichung vorkommen, zusammengesezzt, und jedesmal mit der Ordinate gegeben sei.

Um die Quadratur-Gleichung, das Aequivalent von Z, so bequem, als möglich darzustellen, verlangt Newton folgende

Vorbereitungen, die Form zusammengesezzter Ausdrükke betreffend.

Erstens (sagt er) nenne man $\frac{m+1}{n}$ kurz $= r$

Zweitens nenne man

$$\left(p + \frac{m+1}{n}\right) \text{ oder } (p+r) \text{ kurz} = s$$

Offenbar ist p und r gegeben, weil auch p ein bekannter Exponent des einen Faktors der Ordinaten-Gleichung ist.

Drittens nenne man:

$$\frac{d}{nf}\left(e + f z^n\right)^{p+1} = Q$$

und viertens denke man

$$m+1-n \text{ oder } n\left(r-1\right) = v$$

Diese

Diese (*) vier Voraussezzungen und Umbildungen werden einmal von Newton gefordert; warum er sie fordert, giebt er bei der Aufstellung dieser Gleichungen nicht an; und kein Mathematiker sieht freilich, wenn er bis hieher gelesen hat, ein, wozu die Umbildungen dienen sollen, noch wie Newton daraufgekommen, oder welche Veranlassung er gehabt habe, sie so aufzustellen. Insbesondere fehlt die Ableitung der dritten Gleichung, (zu Q), und man vermißt, (daß ich so rede) die Legitimation dazu völlig. Newton übergieng die Anstände und Bedenklichkeiten, von denen er wol voraussehen konnte, daß sie Leibnitzen und jeden seiner Leser beunruhigen müßten, und — legitimirte sich gleichsam blos durch die nach allen Seiten hin erprobte Zuverlässigkeit unbestreitbar von statten gehender Anwendungen.

Nach den angeführten Vorbereitungen und Umbildungen der 4 Grösen zu r, s, Q, v behauptet er:

(*) In Ansehung der lezten Gleichung denke man $n.(r-1) = n.\left(\frac{m+1}{n} - 1\right)$; offenbar giebt die Reduction unter einen Nenner $\frac{n}{n}.(m+1-n)$, welches eben $= m+1-n$ beträgt.

Die Fläche unter der Curve, welcher die angenommene Ordinaten-Gleichung zukäme, lasse sich durch folgende Quadratur-Gleichung allemal vorstellen:

$$z = Q\left[\frac{z^v}{s} - \left(\frac{r-1}{s-1}\right)\frac{eA}{f.z^n} + \left(\frac{r-2}{s-2}\right)\cdot\frac{eB}{fz^n} - \left(\frac{r-3}{s-3}\right)\cdot\frac{e.C}{fz^n} + \ldots - \ldots\right]$$

wo A, B, C, D, ... allemal die nächstvorhergangene Glieder ganz bedeuten, wie bei dem erläuterten Verfaren S. 62. so daß z. B. $A = \frac{z^v}{s}$ gilt; B = dem 2ten ganzen Glied ist, u. s. w.

Diese Reihe zwischen den Klammern, welche Q zum beständigen Factor hat, scheint nun zwar in jedem Fall nur eine Näherungs-Quadratur anzeigen zu koennen, weil ihre Glieder in einem beständigen Wechsel von + und — ohne Ende fortgehen zu müssen scheinen. Allein diese Reihe bricht in jedem einzelnen concreten Fall sicher ab, so oft r odre $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte Zal in Concreto bedeutet; also so oft

$$\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2}; \text{ oder } \frac{2+1}{3}; \text{ oder } \frac{3+1}{4}$$

in

in bestimmten Fällen vorkommt; und zwar bricht die Reihe allemal so ab, daß zwischen den Klammern nur so viele Glieder noch bestehen, oder (vorne herein) übriggeblieben, als die ganze Zal $\frac{m+1}{n}$, oder r, Einheiten hat.

Wenn also $r = \frac{3+1}{2}$, d. i. 2 gilt, so geht die Reihe nur bis in das Glied mit dem Factor A; Wenn aber $r = \frac{5+1}{2}$ d. i. 3 gälte, so gienge die Reihe bis in das dritte Glied, das den Factor B noch hat.

In diesen Fällen also erhält man nach Newtons Versicherung ganz vollendete Quadraturen, wie die parabolische sind, von welchen wir oben von S. 79. bis 89. mehrere schon kennen gelernt ha-ben.

So oft aber $\frac{m+1}{n}$ oder r einen Bruch in Concreto bedeutet, so oft laufen die Glieder der angezeigten Reihe ins unendliche fort, und können daher natürlich blos auf Näherungs-Quadraturen führen, dergleichen die des Kreises nnd der Ellipse sind. Die Flächen der Curven dieser Art lassen sich natürlich schärfer und immer schärfer in Rechnnng angeben, jemehr Glieder aus der

Reihe man in concreten Zalen wirklich auswirft, und (meistens in Decimalen, in der Anwendung) addirt.

§. 19.

Um sich von der Richtigkeit der Angaben, welche der vorhergehende §. enthält, zu überzeugen, und den Zusammenhang der aufgestellten Ordinaten-Gleichung mit der darauf gesezzten Quadratur-Formel deutlich einzusehen, mus man folgende Anwendungen unmittelbar vornehmen, und daher die damit sich ergebende Vergleichungen ziehen:

Man lege sich die Ordinaten-Gleichung einer apollonischen Parabel vor, und schreibe $y = \sqrt{az}$; so daß man unter z Abscissen verstehe. Hierauf werfe man sich die Frage auf:

„Wie kan wol $\sqrt{az}$ unter die allgemeine
„Ordinaten Formel $dz^m \left(e + fz^n\right)^p$
passen?

Nach einigen Erwägungen wird man einsehen, daß $y = \sqrt{az}$ oder $(az)^{\frac{1}{2}}$ geschrieben werden müsse, wie folgt:

y =

$$y = 1 \cdot z^0 \cdot (0 = a \cdot z^1)^{\frac{1}{2}}$$

um unter die Formel

$$y = d \cdot z^m (e + f \cdot z^n)^p$$

zu passen, daß man also $f = a$; als den Parameter hier sich denken müsse; ferner

$d = 1$; $e = 0$;

Die Exponenten aber: $m = 0$; $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$

Unter diesen Bedingungen wird die allgemeine Ordinaten-Gleichung allerdings zu einer Ordinaten-Gleichung der Parabel des ersten Geschlechts.

Hierauf ist nun zu den 4 Umbildungen zu schreiten, um die Werthe von r, s, Q, v in Concreto zu erhalten, und damit zur Quadratur gehörig vorbereitet zu seyn.

Also 1) $\frac{m+1}{n}$ mus hier $\frac{0+1}{n} = 1$; folglich muß

$r = 1$ hier gelten

2) $p + r = s$ muß hier $\frac{1}{2} + 1$ seyn;

das ist: es muß $s = \frac{3}{2}$ gelten

3) Aus $\frac{d}{nf} (e + fz^n)^{p+1} = Q$

muß $\frac{1}{1 \cdot a} (0 + a \cdot z^1)^{\frac{1}{2}+1}$ oder $\frac{1}{a} \cdot (az)^{\frac{3}{2}}$

werden; oder kurz: $z \cdot \sqrt{az}$ wird $= Q$

4) $r(n - 1) = v$ wird endlich
$1 \cdot (r - 1)$ d. i. o wird $= v$ gelten.

Nach dem man nun mit diesen 4 Gleichungen fertig ist, so sezze man diese Werthe $1; \frac{3}{2}; z\sqrt{az}$; und o, in die allgemeine Signaturen der Quadratur-Formel ein, nehmlich in

$$Z = Q \cdot \left[\frac{z^v}{s} - \left(\frac{r-1}{s-1} \right) \frac{e \cdot A}{fz^n} + \ldots \right]$$

$$= z \cdot \sqrt{az} \left[\frac{z^o}{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1-1}{\frac{3}{2}-1} \right) \cdot \frac{o \cdot A}{a \cdot z^1} + \ldots \right]$$

Man bemerkt augenblicklich, daß die Reihe der Glieder innerhalb der Klammern schon mit dem 2ten Glied, welches die Factorn $o \cdot A$ enthält, abbrechen müsse, weil $e = o$ dieses Glied vernichtet; und daß auch alle folgende wegfallen müssen, weil e in allen als Factor vorkommt. (Man sehe auf S. 144. zurück). Der wahre Betrag der ganzen Quadratur-Gleichung ist demnach blos

$$Z = z \cdot \sqrt{az} \left(\frac{z^o}{\frac{3}{2}} - o \right) \text{ d. i. } z\sqrt{az} \cdot \left(\frac{2}{3} \right) \cdot z^o$$

oder kurz, und nach gewohnter Art geordnet

Z ist $= \frac{2}{3} \cdot z\sqrt{az}$ oder $\frac{2}{3}\, z \cdot y$

Und

Und so viel beträgt eben die quadrirte Parabel des ersten Geschlechts, wie wir oben S. 79 . . 83. umständlich genug dargethan haben.

Man bemerke, daß in diesem Beispiel 1) die Signatur $\frac{m+1}{n}$ oder r keinen Bruch, sondern eine ganze Zahl, (r = 1) bedeutet habe; daher die Reihe abbrechen müssen;

2.) daß die Reihe schon im ersten Glied abgebrochen sei, welches die Geltung r = 1 erfordert. Beede allgemeine Gesezlichkeiten, welche im vorigen §. angezeigt worden, sind also vollkommen zugetroffen, so daß damit dieses Beispiel doch schon eine Probe von der Richtigkeit der generellen Regel abgegeben hat, welche Newton nach S. 144. behauptet.

Man nehme ein 2tes Beispiel: Die Gleichung für cubische Parabeln heißt allgemein (wie bereits S. 84. vorgekommen) $y = (a\,xx)^{\frac{1}{3}}$

Um die leztere Gröse unter die Newtonische Formel zu bringen (sie zu accomodiren) muß man sie unter folgender Gestalt sich denken:

$$1 \cdot x^0 \left(0 + ax^2\right)^{\frac{1}{3}} = d \cdot x^m \left(e + f \cdot x^n\right)^p$$

Damit

Damit ist ausser zweifel

$$d=1;\ e=0;\ m=0;\ n=2;\ p=\tfrac{1}{3}$$

so daß die Bedeutungen dieser Signaturen sich blos bei n und p von denen des nächst vorigen Beispiels ändern; (denn d, e, und m behalten die Geltungen welche sie S. 147 hatten). Aber die Aequivalente zu r, s, Q, v ändern sich gänzlich. Denn

1) aus $\frac{m+1}{n} = r$ wird jezt $\frac{1}{2}$

2) aus $p+r = s$ wird jezt $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

3) aus $\frac{d}{nf}\left(e+fz^{n}\right)^{p+1} = Q$

wird $\frac{1}{2\,.\,a}\left(0 + a\,.\,x^{2}\right)^{\frac{4}{3}}$ d. i. $\frac{1}{2a}(axx)^{\frac{4}{3}}$

oder auch: $\frac{x^{2}\sqrt[3]{axx}}{2}$

4) aus $n\,(r-1)$ wird $2\,.\,(\frac{1}{2}-1) = -1$

Hieraus bildet man nun die Quadratur-Formel

$$Z = \frac{x^{2}\,.\,\sqrt[3]{axx}\,.}{2}\left[\frac{x^{-1}}{\frac{5}{6}} - 0\right]$$

d. i. $= \left(\frac{x^{2}}{2}\,.\,\sqrt[3]{axx}\,.\,\frac{6}{5}\,.\,\frac{1}{x}\right)$ od. $\frac{6}{10}\,.\,x\,.\,\sqrt[3]{axx}$

Denkt

Denkt man $x = \sqrt[3]{xxx}$, und sezt $\sqrt[3]{a}$ als einen besondern Factor, indem die Stellung der Factoren ja gleichgültig ist, so erhält man

$$z = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x^5}$$

und sieht damit wieder ganz eben dieselbe Quadratur vor Augen, welche bereits oben S. 87 auf einem andern Weg gefunden, und eben so ausgedrückt mitgetheilt worden.

Auch in diesem Beispiel ist r kein Bruch, sondern eine ganze Zahl; ($r = 1$) und die Reihe muß daher (der Regel im §. 18.) gemäs abbrechen; sie bricht auch und zwar schon im ersten Glied wirklich ab. — Und so ist eben damit eine zweite Probe über die allgemeine Gesezlichkeit gemacht.

§. 20.

Ein Beispiel, in welchem e nicht = 0 ist, dennoch aber die Reihe im 1sten Glied abbricht, erhält man, wenn man die Ordinaten Gleichung

$$y = (a^4 z.) \cdot (cc - zz)^{-2}$$

nennt, wo z die Abscisse bedeutet.

Vergleicht man hiemit wieder die allgemeine Gleichung $y = d \cdot z^m \left(e + f \cdot z^n\right)^p$

so

so geht die Accommodation, oder Unterlegung der vorhandenen Grösen

auf zweierlei Art

an; indem nehmlich sowol

$$a^4 . z^1 . \left[cc + (-1 . z^2\right]^{-2} = y \text{ ist,}$$

als auch $a^4 . z^{-3} \left[c - 1) + cc\, z^{-2}\right]^{-2} = y$

Denn die leztere 2 Factoren sind so viel als:

$$\frac{a^4 . z^4}{z^3 \quad (cc - zz)^2}$$ welches eben auf die vorgegebene Ordinaten=Gleichung wieder hinaus läuft

Durch die zweifache Unterlegnng erhält aber von den 4 Grösen r, s, Q, v der beständige Factor in die Hauptreihe, Q, eine verschiedene Bedeutung, wie sich leicht absehen läßt; eben deshalb gelangt man aber auch auf zweierlei Quadraturen hinaus. Denn

bei der ersten Annahme wird

$$Z = Q . \left[-\frac{z^0}{1}\right] = a^4 . \left[2cc - 2zz\right]^{-1}$$

bei der zweiten aber wird

$$Z = Q . \left[-\frac{z^0}{1}\right] = a^4 zz . \left[2c^4 - 2cc\, zz\right]^{-1}$$

Jeder

Jeder, der die Feder in die Hand nehmen, und die Entwicklungen, um diese Grösen ans Licht zu ziehen, selbst versuchen mag, wird ohne Mühe zum Ziel gelangen, indem der Mechanismus der Formeln leicht ist. — Nähere Erläuterungen aber über die Gestalt der Curven, welchen die vorgelegte Ordinaten-Gleichung zukommt, wie auch über die verschiedene Lage der zwei quadrirten Flächen muß ich zurücklassen; da mich meine Verhältnisse nöthigen, diese Lucubrationen für jezt abzubrechen.

So viel erhellet nun doch wol immer, daß unsere neuere Ordinaten-Gleichung und Quadratur-Formel des §. 19 von viel grösserer Ausdehnung sei, als die von §. 1. 2. bis §. 18. von uns erläuterten, nehmlich als

$$y = a x^{\eta - 1} \quad \text{und} \quad Z = \frac{1}{\eta} a \,.\, x^{\eta}$$

und daß diese in der That nur als Gattungs-Gleichungen, welche einer höhern Geschlechts-Gleichung *) untergeordnet seien, angesehen werden müssen.

Der

*) Newton hat Leibnizen hierüber keinen andern Beweis, als durch Induction mitgetheilt, wie schon S. 143. gedacht worden; aus einer besondern Diatri-

Der Geist der Erweiterung, der Newton überall gleichsam drängte, war also auch bei diesen Untersuchungen sehr thätig, und leitete ihn in neue grose Regionen der höhern Speculation, welche bisher noch niemand besucht oder gekannt hatte. Selbst, da nun das Feld geöfnet, und die Eingänge in dasselbe angezeigt sind, wie wenige haben den Weg dahin genommen? oder, wenn sie ihn auch etwa nahmen, und anfangs große Lust hatten, sich ebenfalls in den erwähnten durch Ruhm ihnen bekannten Revieren umzusehen, wie wenige Männern haben seit mehr als 100 Jahren nun Geduld und Beharrlichkeit besessen, den Weg zu verfolgen, und die freilich meistens einsame nicht immer bequeme Bahnen bis ans Ende fortzusezzen? Newton gieng — allein; sah kaum, hie und da in der Ferne einen unsichern Vorgänger vor sich, einen verlässigen, der Gegend wol kundigen Vorgänger sah er gar nicht; . . . und wol mehr als einmal mag ihm im Fortwandeln die

be, welche Newton erst im Jahr 1704. zu London herausgegeben, und welche die 3te Stelle der Abhandlungen des T. I Opuscul. Mathem. einnimmt, läßt sich dieser Beweis mit hinlänglicher Strenge ableiten und darstellen. Die Erörterungen darüber würden mich aber hier viel zu weit führen.

die Bahn ausgegangen seyn; wol mehr als einmal muß er auf Seitenbahnen, und Umwege gerathen seyn, die ihn aufhielten, wol selbst einige Zeit irre führten, oder doch von dem rechten Ziel leicht ablenken konnten. — Aber seine Geduld ward dadurch nur geprüft, er suchte, ohne abzulassen, neue Pfade, und fand nach und nach die Höhen mit den unübersehlichen Weiten und Aussichten, an denen — spätere Nachkommen, wie es scheint, noch mehr, als seine Zeitgenossen, und als die nächsten Liebhaber von Mathematik nach ihm, sich weiden werden.

IIIte Diatribe.

Durchzählung mehrerer vorzüglichen Entdekkungen Newtons in höherer Mathematik.

Debilitat Series immensa laborum? —
— Animus quoque pascitur illis!
Ovid.

Es scheinet mir dem Zweck dieser Blätter gemäß zu seyn, folgende Entdekkungen Newtons in Analysis und höherer Geometrie wenigstens in Kürze anzuführen, und zu einiger Uebersicht zusammen zu stellen, da mir wegen mehrerer Hindernisse nicht verstattet seyn will, sie umständlich zu erläutern, oder ihnen durch besondere Abhandlungen für mehrere Leser ein grösseres Interesse zu verschaffen.

[I.]

[I.]

Schon in dem ersten S. 4. angeführten (für Leibnizen bestimmten) Briefe theilte Newton seine selbst ausgedachte Methode, die unbekannte Wurzelner numerischer Gleichungen des 3ten, 4ten . . . Grades durch Näherung leicht zu finden, mit:

Er sezzte dabei voraus: man kenne bereits die eine der Wurzeln der vorgegebenen Gleichung bis auf Zehntheilchen, falls sie keine ganze Zahl (mit einem angehängten Bruch) seyn sollte, oder wenn sie eine wäre, wenigstens die ganze Zahl selbst, noch ohne den angehängten Bruch; z. B. man kenne von der einen Wurzel der unreinen cubischen Gleichung

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

so viel, daß y grösser als 2, aber kleiner als 3 sei. Seine Vorschrift nun gieng dahin: 1) Man solle allgemein $y = 2 + p$ in diesem Fall annehmen, also

$$yy = 4 + 2 . 2p + p^2 ;$$

Weiter auf y^3 so fortschließen; und darnach die vorgegebene ganze Gleichung

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

in den Ausdruck von $2 + p$ ($= y$) versezzen. Man werde erhalten:

$$p^3 + 6\,p^2 + 10\,p - 1 = 0$$

2) Von dieser Gleichung solle man nur die lezte Glieder beibehalten $10\,p - 1 = 0$, und allemal die mit Potenzen von p ganz aus der Acht lassen, wegen der Geringfügigkeit ihres Gehalts; man solle aus $10\,p - 1 = 0$ hierauf sogleich

$p = \frac{1}{10}$ oder 0, 1 folgern; aber weil p in der That grösser seyn müsse, sezzen: $0,1 + q = p$

3) Darauf habe man in die Gleichung

$$p^3 + 6\,p^2 + 10\,p - 1 = 0$$

diesen (neuen) Werth von p einzuschreiben. So werde man für sich bekommen:

$$q^3 + 6,3 \cdot q^2 + 11,23 \cdot q + 0,061 = 0$$

4) Hievon solle man wieder nur

$$11,23 \cdot q + 0,061 = 0$$

heraus nehmen, und q durch Division suchen; der Quotient werde verneint seyn $= - 0,0054$. Hierauf solle man $- 0,0054 + r = q$ schreiben;

und das Geschäft auf gleichförmige Art fort sezzen, so weit man nur die Schärfe zu treiben für nöthig finde; alsdenn die gefundene bejahte Quotienten zusammen addiren, die verneinte abziehen;

so

so werde man die Wurzel in Näherung erhalten, z. B.

$$y = [2 + 0{,}1 - 0{,}0054 \ldots] = 2{,}0945 \ldots$$

Die Fortsezzung dieser Arbeit wird

$$y = 2{,}09455147 \ldots$$

geben. Die Art, die Näherung, so weit als man will zu treiben, erhellet aus den angeführten Vorschriften nun wol hinlänglich.

[II.]

Mit dieser Belehrung ist zunächst die verwandt: Gleichungen, welche zwei veränderliche Grösen enthalten, x und y, und zwar beede auf Potenzen erhöht, (æquationes affectas) aufzulösen. Z. B. wenn

$$y^3 + a^2 y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

vorgelegt würde.

Newton gab in eben dem angeführten Brief an Oldenburgen, (auch in andern Abhandlungen) an, wie er sich hiebei zu benehmen pflege:

Zuerst denke er sich x = 0, welches, weil x eine veränderliche Gröse sei, wol angehe. Nach dieser Annahme würde aus der vorgelegten Gleichung diese:

$$y^3 + a^2 y - 2a^3 = 0$$

 2) Diese

2) Diese Gleichung bestünde, wenn man $y = a$ gelten liesse. Denn allerdings wird dadurch alles rechter Hand zu Zero.

In der ersten Gleichung, welche 2 Glieder mehr hat, müße aber wol y um etwas grösser, (oder auch wol kleiuer) als a seyn. Er sezze demnach $y = a + p$ und verfahre alsdenn, um seine Absicht y durch x, oder besser durch eine Gleichung, welche nach x geordnet ist, so scharf (wie möglich) auszudrükken, wie folgt:

4) Er sezze in alle Glieder der ersten Gleichung, $a + p$ ein, wo y darinn vorkomme, und erhalte dadurch

$$a^3 + 3\,a^2 p + 3\,a\,pp + p^3 + a^2 x + a x p$$
$$+ a^3 + a^2 p - x^3 - 2\,a^3 = 0$$

5) Davon behalte er aber nur die Glieder, in welchen x, oder p, als Factoren, einzeln stünden, bei, und stelle daher neben einander:

$$+ 4 \cdot a^2 p + a^2 x = 0$$

Daraus folge: $4\,p = -x$; und also

$$p = -\frac{x}{4}\text{; dafür er } -\frac{x}{4} + q$$

sezze, weil allerdings (der weggelassenen Glieder

we=

wegen) p nicht vollkommen $x = -\frac{x}{4}$ betragen könne.

6) Aus nr. 2 und nr. 5 habe man nun schon: $y = a - \frac{x}{4} + \ldots$ und erhalte ein drittes Glied $\left(+ \frac{1}{64a} \cdot x^2\right)$ dazu, wenn man in die erste Gleichung für y nun $-\frac{x}{4} + q$ einschreibe, von den addirten Gliedern nur die mit den Factoren q und x beibehalte, und aus

$$+4a^2q - \frac{1}{16} \cdot x^2 = 0$$

welche Gleichung bei diesem Verfaren übrig bleibt, weiter folgre, wie in nr. 5. So gelange man zu

$$y = a - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16 \cdot a}x^2 + \ldots$$

Hieraus erhelle nun schon wol überflüssig, auf welche Art das Geschäft (y in Näherung zu bestimmen) fortzusezzen sei.

Leibniz schien mit dieser mechanischen Anweisung nicht zufrieden zu seyn, verlangte Rechtfertigung und Erläuterung über die von Newton allgemein gesezzte Grösen p, q, r, .. und wünschte die Art zu kennen, wie sie Newton gefunden habe.

Hierauf theilte ihm dieser die Entdekkung, von welcher sogleich besonders zu reden ist, mit.

[III.]

Diese Entdekkung wird noch izt in allen Lehrbüchern kurz

das Newtonische Paralelogramm

genannt. Newton hat die Form und Behandlung desselben, sowol in dem oft angeführten Brief (im Oct. 1676) als auch in seiner Abhandlung Method. fluxionum & serier. infin. (welche Colson erst nach Newtons Tod 1736 herausgegeben) vorgetragen. Die Vortheile dieser Erfindung, welche ihm ausschlieslich allein zu zuschreiben ist, sind gros, können aber erst-angehenden Mathematikern keine Unterhaltung gewähren; sondern blos solchen, für welche

1) höhere Gleichungen, vom 3ten, 4ten, 5ten Grad . . . . und ins besondere Gleichungen, die mehr als nur eine unbekannte Gröse enthalten, von Bedeutung und Interesse sind;

2) solchen, welche in Geometrie nicht blos beim Kreis und den Kegelschnitten stehen bleiben, sondern sich über die Natur und Construction der Linien, die zu Curven von höheren Geschlechten

und

und Ordnungen gehören, näher zu belehren suchen.

Um nur einigermasen einzusehen, welche Prämissen, zum Theil wenigstens, dazu gehören, um zu erkennen, daß die Newtonische Entdekkung sehr schäzbar sei, füge ich blos folgendes noch bei:

Wenn eine Gleichung, wie die S. 158. angeführte, mit zwei veränderlichen Grösen vorkommt, so muß man natürlich zuerst darauf ausgehen, die eine derselben (y) durch eine nach Potenzen der andere (x) geordnete Gleichung gehörig auszudrükken. Mann kann also sogleich allgemein annehmen:

$$y \text{ sei } = A + Bx^1 + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

Aber es könnte ja auch wol statt haben:

$$y = Ax^3 + Bx^5 + Cx^7$$

oder auch noch allgemeiner

$$y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d}$$

Allein dabei muß allemal die Frage eintreten, was kann und wird dann m, m + d, . . . in Concreto vorstellen? und nach welchem Gesez mögen die Exponenten wol in dem unterliegenden Fall fortschreiten? — Die Gestalt der Reihe

mus also ausgekundschaftet werden, und erst, wenn man diese kennt, kann man sich zu den Coeffizienten wenden, und diese (A, B, C, D . .) zu bestimmen suchen, d. h. heraus zu bringen suchen, ob sie verneint, oder bejaht, und was für Zalen ihnen in Concreto unterzulegen seien.

Um die Form oder Gestalt der Reihe nun (das erste Requisit bei diesem ganzen Geschäft) sicher ausfindig zu machen, und nach einem allgemeinen Verfaren mit Zuverlässigkeit Auskunft darüber zu bekommen, — dazu ersann Newton sein Paralelogramm, und lehrte dessen Behandlung. Die Benennung rechtfertigt sich wenn man nur die Reihe folgender Potenzen, so gestellt, ansieht:

x^3	x^3y^1	x^3y^2	x^3y^3	.
x^2	x^2y^1	x^2y^2	x^2y^3	.
x^1	x^1y^1	x^1y^2	x^1y^3	.
$x^0 = y^0$	y^1	y^2	y^3	y^4

Die

Die Reihen müssen aber meistens viel weiter nach allen Seiten hin erstrekket werden, so daß man auch Potenzen mit verneinten Exponenten erhalte. Auch kann man überhaupt y und x weglassen, und blos die Exponenten in die Fächer einschreiben. Man bemerkt hierauf in jeder einzelnen vorgegebenen Gleichung die höchsten Potenzen von x und y; sieht in dem Paralelogr' nach, wo sie stehen, legt durch sie ein Lineal, nimmt die Grösen in Acht, durch die es streicht; schreibt sich die in dieser Lage getroffene Potenzen welche die Gleichung angehen; heraus, und bildet daraus eine neue kürzere Gleichung, welche den ersten Ausdrukk für y bald verrathen oder anzeigen wird, wie sich y durch x darstellen lasse. —— Aber das Verfahren läßt sich noch viel allgemeiner beibringen, und mus auch selbst allgemeiner gefaßt werden, wenn man den Umfang der Vortheile übersehen will, welchen diese Erfindung verschaft. Ohne eine besondre Abhandlung zu schreiben, läßt sich aber wol nichts deutliches darüber zur Befriedigung forschender Neugier vortragen. Die grösten Geometer Mac-Laurin, Cramer, und Kästner haben übrigens Aufklärungen über den Gebrauch und die Erstrekkung dieses Paralelogramms gegeben, welche von Newton selbst zurück gehalten worden, auch wol zum

theil

Theil ihm selber noch unbekannt waren. Insbesondere hat der leztere die Beweiße der Operationen aufgesucht, welche in Newtons Schriften selbst, beinahe blos wie Acte eines unerklärlichen Mechanismus, vorgeschrieben werden.

[IV.]

Newton beschäftigte sich weiter, (wie wol mehrere Analysten vor ihm) mit der Aufgabe: „die Wurzeln höherer Gleichungen aus den (gege„benen) Coefficienten zu bestimmen." Bekanntlich sind aber seine Bemühungen sowol, als die nachfolgender Algebraiker, allgemeine Formeln der Auflösung, wie bei Gleichungen des zweiten Grades statt haben, zu finden, meistens fruchtlos gewesen. Allein Newton entdekkte doch eine die Wurzeln aller Gleichungen sehr nah' angehende Gesezzlichkeit, welche immer vorzüglich wichtig bleibt.

Mit dem Coefficienten des zweiten Gliedes jeder richtig geordneten Gleichung ist bekanntlich die Summe der Wurzeln gegeben. Diese Summe heisse allgemein R; so kann

$$R = (a + b + c)$$

oder $R = (a + b + c + d)$

be-

bedeuten, je nachdem eine Gleichung vom 3ten oder vom 4ten Grad vorgelegt wird. Die Vorstellung für höhere Grade begreift jeder wol durch natürliche Folgerung für sich.

Nun denke man unter R . 2 die Summe von den Quadraten der Wurzeln einer vorgegebenen Gleichung; also mag

$$R . 2 = a^2 + b^2 + c^2$$

oder $R . 2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
und so weiter fort . . . . seyn.

Gleichförmig bedeute R 3 die Summe der einzelnen cubirten Wurzeln;

R . 4, die Summe der B quadrate der Wurzeln.

Also mag auch hiernach allgemein;

Rr bedeuten die Summe der in die Potenz mit dem Exponenten r erhobenen Wurzeln:

$$Rr = a^r + b^r + c^r + \ldots$$

und R (r — 1) die Summe der in die Potenz mit dem Exponenten (r — 1) erhobenen Wurzeln.

Diese Vorstellungen nun vorausgesezt, fand Newton, daß sich R ; R 2 ; R 3 ; . . . . wie folgt, ausdrükken liessen:

$$R = a$$

$$R2 = a R + 2 b$$

$R3 = aR2 + bR + 3c$

$R4 = aR3 + bR2 + cR + 5d$

und weiter ganz allgemein:

$Rr = a.R(r-1) + b.R(r-2) + cR(r-3) + ..$

Das lezte Glied mag allgemein + (r . s) geschrieben werden. Der eine Factor r ist allemal unmittelbar gegeben; der andere (s) ist in der vorgelegten Gleichung aufzusuchen; er ist nehmlich

wenn die Gleichung vom 2ten Grad ist, der Coefficient zu x^{2-r}

wenn sie vom 3ten Grad ist, der Coeffic. zu x^{3-r}

wenn sie vom mten Grad, der Coeffic. zu x^{m-r}.

Newton hat die Entdekkung dieser Gesezlichlichkeit nach welcher jederzeit das Verhältnis erhellet, das zwischen

den Coefficienten einer vorgelegten Gleichung

und den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln statt findet, in seinem classischen Werke, de Arithmetica universali in dem Abschnitt de transmut. æquation. vorgetragen, den Beweis aber davon zurückgehalten. Maclaurin, Bärmann, Kästner und dela Grange, haben aber (obwol jeder auf einem andern Wege) dessen Richtig-

tigkeit aus sichern Gründen dargethan. — Ich muß es gegenwärtig bei dieser historischen Anzeige bewenden lassen.

[V.]

Die allgemeine Gleichung, welche Linien der 3ten Ordnung zugehört, wird durch

$$y^3 + bxyy + cyy + dxxy + exy + fy + ax^3 + gxx + hx + k = o$$

ausgedrükkt. Wie die Curven aber geartet seien, denen eine solche Gleichung zukomme, welche Unterabtheilungen wegen vieler bei ihnen sich ändernden Eigenschaften (je nachdem nehmlich einige Glieder in der allgemeinen Gleichung zu Null werden, oder in Concreto negative Coefficienten haben) bei diesen Curven anzunehmen seien, darüber war bis auf Newtons Zeiten noch gar wenig ausgemacht worden. Er begann seine Untersuchungen darüber schon frühzeitig (bereits in dem Jahrzehnd von 1660. bis 1670.) gab aber seine dabei gemachte Entdekkungen erst 1704. (mit seiner Optik) in einer Abhandlung, welche die Aufschrift hatte; de enumeratione linear. tertii ordinis, heraus. Alle Gelehrte seiner Zeit erkannten die Neuheit und den Tiefsinn der Erörterungen in diesem Fach, welchen alle bisherige weit nach-

stun-

stunden. Die wenigsten dieser Gelehrten, auch derer, die Newton lobpriesen, — (man mus es nur gestehen) besassen aber die nöthigen Vorkenntnisse, um den Belang der angeführten Abhandlung genau übersehen zu können. Allein die feinsten Mathematiker, die in der That in höherer Analysis bewandert waren, und sie damals selbst zu erweitern suchten, bekannten doch einstimmig, daß so hohe Entdekkungen in Geometrie und Algebra noch von keinem Gelehrten bis auf Newton seien gemacht worden, uud die Zeugnisse dieser Männer — war ihre Anzahl gleich gering — hatten Gewicht genug, um bald allgemein geltend anerkannt zu werden.

Newton fand 72gerlei Arten von Curven, welche sich unter die angeführte allgemeine Gleichung bringen, und füglich selbst wol unterschieden liessen. Er zeigte, wie einigen drei Asymptoten, andern zwei, andern nur eine Asymptote zukämen; desgleichen in welchen Fällen drei Durchmesser, in welchen zwei, in welchen einer, und in welchen gar kein Durchmesser statt finde; welche dieser Curven einen Mittelpunkt hätten, in dem sich die Durchmesser schnitten; wo dessen Lage immer anzunehmen sei, und welchen Curven (bei welchen Voraussezzungen) der Mittelpunkt gar feh-

fehlen müsse. Ein geschikkter Analyst nach Newton nannte die Durchzählung der erwähnten Linien der 3ten Ordnung und die Uebersicht der Darstellungen, die sie veranlassen,

Spectaculum, inter pulcherrima & maxima a
Geometria edita referendum —

und sein Ausspruch bleibt noch wahr, wenn gleich die weiter gehende Ausspähungen einiger grosen Geometer nach Newtons Tod — den Anlaß zum bloßen Anstaunen weggenommen haben, mit welchem Newtons Formeln und dazu gehörige Figuren einige Jahrzehnde lang beinahe nur als Wunderwerke angesehen wurden. Dieses Anstaunen ward für die allermeiste Mathematiker auch dadurch lange unterhalten, weil Newton bei diesen Erörterungen abermals die Gründe und Beweise zurückgehalten hatte, auf welchen die Resultate seiner Erforschungen beruhten. (*) Andere Mathematiker, als Stirling, Mac-Laurin, Nicole, Bragelongne, und vorzüglich Euler haben diese Gründe nach und nach genau auf-

(*) Sehr warscheinlich leiteten ihn mehrere angestellte Betrachtungen über sein vorher erfundenes Paralelogramm/ und Versuche, Anwendungen daraus zu ziehen.

aufgesucht, und Newtons geometrische Constructionen alle wahr gefunden. Nur der leztere hat die Arten der Curven von der 3ten Ordnung, mit Erwählung eines andern Eintheilungsgrundes von 72. auf eine viel kleinere Zahl reducirt; und noch mehr Licht über die ganze Entdekkung Newtons verbreitet. Allein Newtons Ausspähungen über die erwähnten Curven zeugen doch immer von dessen ganz besonderem originellem Scharfsinn, welchen ihm niemand abstreiten kann.

[VI.]

Einen ruhmvollen Beweis seiner durchdringen Einsicht in Analysis und höherer Mechanik zugleich gab auch Newton im Jahr 1697, als Jo. Bernoulli allen Mathematikern die Auflösung des grosen Problems vorlegte: „Den kürzesten Weg zu bestimmen, welchen ein schwerer „Körper, der so schnell als möglich von einem gegebenen Punkt in Schiefe bis zu einem andern kommen „solle, nehmen müsse.“ (Lineam brachystochronam.) Schon Galiläi hatte wol bemerkt, daß dieses nicht die Diagonale in einem Rechtekk seyn könne sondern eine Curve seyn müsse. —

Bernoullis Aufruf an die Gelehrte machte vieles Aufsehen, und reizte viele Mathematiker, das vorgelegte Problen zu lösen. Aber es ward bald

kund-

kundbar, daß, ausser ihm selbst und seinem Freund Leibniz, kein Mathematiker das Geheimnis zu ergründen wisse. Allein sobald die Aufgabe nach London, und Newton zu Gesicht kam, so hatte dieser sie kaum ein paar Stunden unter den Händen, als er einsahe, wie die Sache zu fassen, und auf welchem Weg dem Räthsel beizukommen sei. In einer biographischen Skizze seines Lebens wird selbst versichert: „er sei des Abends müde „von seinen Berufsgeschäften, aus der Münze zu „London nach Hause gekommen, habe da erst „das Problen zu Gesicht bekommen, und dasselbe „noch vor Schlafengehen gleichsam spielend auf„gelöst". Er fand nehmlich, daß der gesuchte Weg eine umgekehrte ordentliche Cykloide seyn müsse, und fügte den Beweis über die Richtigkeit seiner Behauptung sogleich in Kürze bei. Derselbe steht in s. Opusc. Math. Nro. VI.

[VII.]

Newton hat noch viele andre räthselhafte Probleme, welche in der That zum Theil noch schwerer waren, und viel mühsamere Entdekkungen, als das Bernoullische voraussezzten, aufgelöst. Davon zeugen unter andern namentlich, seine Untersuchungen über die Aufgabe:

Tangenten, an krumme Linien zu ziehen.

Die Bemühungen verschiedner Geometer des vorigen Jahrhunderts, hierüber eine allgemeine Methode zu finden, waren bis auf seine Zeiten nicht recht geglükkt. Descartes hatte allerdings manches darüber ausgespäht, das Belehrung für mehrere Fälle gab. Aber die Kunst, jede Frage zu beantworten, welche bei einer willkührlich gewählten Curve (mit einer neuersonnenen Ordinaten-Gleichung) die Bestimmung der Subtangente wissen wollte, und also den Punkt, auf dem die Tangente die Axe oder verlängerte Abscisse der Curve träfe, ohne Ausnahme sicher anzugeben verlangte, die Kunst, eine so universelle Gesezzlichkeit zu ergründen, war vor Newton und Leibniz noch nicht aus Licht gebracht.

Newton gab

acht Methoden

an, Tangenten an Curven der manigfaltigsten Art zu ziehen, und zeigte, (*) bei welchen der eine Weg dem andern vorzuziehen sei; und welcher vor dem andern auf bequemere Constructionen führe. Er zeigte, wie sich die Aufschlüsse über eine Menge einzelner Fragen der Neugier, über die man sonst ganze Bücher geschrieben hatte, wenn

(*) In s. Method. fluxion der IIten Abh. in den Opusc. Mathem. S. I.

wenn man die von ihm vorgezeichnete Pfade verfolge, blos als kurze Corolarien einiger allgemeinen Sâzze ergâben, und wies, z. B. wie leicht es sei, den Punkt in jeder Muschel-Linie oder Conchoide, in welchem sich der convexe vom concaven Theil sondert, und dann ůberhaupt den Wendungs- oder Biegungs-Punkt in jeder âhnlichen Curve zu finden; er wies die Anwendung der Tangentenlehre auf Zurůckwerfung und Brechung der Lichtstralen, in Katoptrik und Dioptrik; und — ůberfůhrte jeden Mathematiker von seiner Ueberlegenheit ůber Descartes, und jeden Analysten vor seiner Zeit.

[VIII.]

Jedes Auge sieht, daß sich die Krůmmungen zweier oder mehrerer vorgelegten Curven vergleichen lassen, und daß Grade, und Abstufungen von Krůmmungen statt haben. Ein Kreis mit einem Diameter, der nur einen Zoll lang ist, hat gewiß eine grôssre Krůmmung, als einer mit einem Diameter von 4 Zollen. So verhâlt sichs auch bei andern Curven. Aber in jeder einzelnen Curve ausser dem Kreis lassen sich auch Stellen von verschiedener Krůmmung betrachten, und Fragen aufwerfen, um wie viel die Krůmmung wol da grôsser sei, als dort? Bei der Ellipse kann auch

jeden Anfänger schon die Neugier anwandeln, wissen zu mögen, um wie viel wol der Bogen am Scheitel, am Ende der grosen Axe, krümmer seyn dürfte, als der über dem Mittelpunct, am Ende der kleinen Axe?.. oder bei der Parabel wie sich die Krümmung am Scheitel, wol gegen die Krümmung über dem Brennpunkt, am Ende des Parameters, verhalte? ....

Unzälige, diesen ähnliche, aber noch ziemlich viel schwerere Fragen hat Newton sich und andern beantwortet, indem er in besonders scharfsinnigen Untersuchungen allgemein darzulegen sich bemühte, wie sich die Gröse jeder Curvatur an jeder verlangten benannten Stelle einer krummen Linie bestimmt angeben liesse. „Es gäbe kaum in Geo„metrie ausgesucht-schönere Probleme, (äusserte „er einmal selbst hierüber,) und wenige, die solche „Aufschlüsse über die innere Natur der Curven ver„schaften, als die in dem erwähnten Fache."

Er war aber auch damit noch nicht zufrieden, blos die Grösen vorgelegter Krümmungen unter einander zu vergleichen, und ihre Gradationen, in wie weit sie einander (quantitate curvaturæ) übertreffen, zu bestimmen; auch über die

Eigenheit, und specielle Beschaffenheit der Krümmung bei verschiedenen Curven (super qualitate)

stelle

stellte er noch abgesonderte Prüfungen, und Discussionen an; und fragte z. B. beim Kreis, bei Parabeln, bei Spirallinien .... ob die Krümmungen einförmig, ob sie veränderlich, ob sie ungleich seyen; und unter welchen Bedingungen sie ungleicher würden? —

Die Anwendungen davon in höherer Mechanik sind bedeutend, und bis auf unsre Tage und alle Zukunft unbegrenzt.

Noch hätte ich nun weiter reichen Stoff, vieler merkwürdigen Erforschungen Newtons ferner zu erwähnen, welche derselbe in seinen Geometrischen Untersuchungen (Quæstion. Geometr.) vorgetragen hat, (*) und welche ich hieraus ziehen, und mit noch mehrern aus einzelnen Abhandlungen von ihm, z. B. aus der: über Quadraturen; aus der: über Interpolationen, oder (wie er das Geschäft nannte) über Differentiiren; und aus andern ... vermehren könnte. Aber ich mus mich beschränken; und gedenke blos noch auf einigen Blättern von der ausserordentlichen

(*) Diese Quæst. Geom. sind immer mit seiner Arithmet. vniversali herausgegeben werden, und machen einen großen Theil derselben, als eine zweite Abtheilung, aus.

Entdekkung Newtons etwas zu melden, welche ihm allerdings allein Unsterblichkeit verschaft hätte, welche alle sein andre einzelne Ergründungen, und und, man darf beinahe sagen, jede Erfindung des menschlichen Geistes in Mathematik, (wenigstens in einem Zeitraum von ein paar tausend Jahren) überhaupt übertraf, und ihn selbst fähig machte, in den Untersuchungen und Auflösungen, deren wir in Nr. VI. VII. VIII. dieser Diatribe, erwähnt haben, wie auch in denen, welche die ganze IIte Diatribe erläutert, vor andern Mathematikern glücklich zu seyn; — ich meine; seiner Erfindung der Fluxionen = Rechnung.

[IX.]

Schon in den Jahre 1665. und 1666. kam Newton, durch Betrachtungen über die allmälige Veränderung von Flächen aller Art, welche sich auf Rechtekke reduciren lassen, durch deren gleichförmige Ab = und Zunahmen, geleitet, auch wol durch einige geometrische Bemerkungen seines Lehrers D. Barrow über die Gleichungen für Subtangenten weiter geführt, auf die grose Entdekkung der Fluxionen = Rechnung, theilte 1669. bis 1676. etlichen Freunden (in England) einiges davon mit, gab Leibnizen 1676., obwol verstekkt zu erkennen, daß er eine besondre Methode besizze, die Verhältniße unbeständiger Grösen in ihren

klein-

kleinsten Veränderungen zu finden, lies aber erst 1687. seine ergründete Geheimnisse dieser originellen Rechnungsart, (und auch da dieselbe noch nicht vollständig) ins öffentliche Publikum kommen. Leibniz trat schon 1684. mit seiner Differential-Rechnung hervor, legte zwar die Gründe derselben ebenfalls noch ziemlich lange hin, nicht offen dar, zeigte aber bis 1690. doch weit mehr deren Anwendung und die Wichtigkeit ihrer Cultur durch mehrere einzelne ins Publikum erlassene Abhandlungen.

Newtons Freunde mußten diesem seine Belehrungen für das grose Publikum meistens abnöthigen. Insbesondere hielt Newton mit der ganzen Uebersicht seiner Fluxionen-Rechnung recht geflissentlich mehrere Jahre zurükk; und in der That haben erst Wallis, Colson und andre Mathematiker, die um ihn waren, oder in einem genauen Briefwechsel mit ihm stunden, zulängliche Auskunft über den ganzen Sinn und Umfang seiner Ausspähungen in diesem neuen Feld der Gelehrten seiner Zeit, auch selbst zum Theil erst nach seinem Ableben (nach 1727.) gegeben. Die Ursache seiner Zögerung ist wol gröstentheils in seiner Abneigung gegen gelehrte Streitigkeiten und in seiner Liebe zum Frieden zu suchen. Der Gedanke:

„Gelehrter Ruhm, der Disceptationen errege,
„und Widersprüche zur Folge haben, vertra-
„ge sich nicht mit Ruhe des Gemüths, und
„mit innerem Frieden!

schien Newton überall zu begleiten; und er sahe voraus, daß seine Fluxions-Methode gewiß nicht ohne Widerspruch würde aufgenommen werden. Wie es scheint, fielen ihm selbst schon die Briefe der einzelnen Mathematiker, welchen nur durch Mittheilung seiner Manuscripte etwas davon bekannt worden war, und welche ihn durch mehrere gemachte Zweifel und Einwürfe in Geschäften oder weiter fortschreitenden Speculationen unterbrachen, sehr beschwerlich. (*)

Daß Newton bei seiner erwöhnten Zögerung die Absicht gehabt haben sollte, Leibnizens successive Mittheilungen seiner Differentationen zu benüzzen, und von ihm hinterlistig gleichsam zu borgen, ist durchaus unwahrscheinlich und fast gar nicht

(*) Eine Stelle in s. zweiten Brief an Oldenburg läßt dieses schliessen: — Subortæ statim (per diversorum epistolas (objectionibus aliisque refertas) crebrae interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt, & effecerunt, ut me arguerem imprudentiæ, quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem!

nicht gedenkbar. Ja, ich glaube, es kann und darf mit Zuversichtigkeit behauptet werden, (ohne deutschem Ruhm etwas zu vergeben) daß Newton in dem Jahrzehend von 1670. bis 1680. sich Leibnizen weit überlegen gezeigt hat, und daß er gewiß die Gründe seiner Fluxionen damals besessen habe, und sie von diesem nicht habe entlehnen können. Auch läßt sich ganz und gar nicht in Abrede stellen, daß Leibniz in dem angeführten Jahrzehnd umgekehrt viel von Newton gelernt; und ihn, als einen erfahrnern Mathematiker, und als einen originellen Entdekker groser Wahrheiten in Analysis verehrt habe.

Näher mich in den berüchtigten Streit, der besonders 1712. bis 1716. zwischen Leibniz, und Newton, oder mehr zwischen jenem und einigen Freunden des leztern geführt worden, einzulassen, verstatten mir meine Verhältnisse jezt nicht. Selbst die Auseinandersezzung des Unterschieds zwischen Newtons Fluxionen und Leibnizens Differentialien, (welcher ich wol einen Plaz in dieser Diatribe hätte zuwenden mögen) würde mich nöthigen, dieselbe um 6 bis 8 Bögen zu vergrössern, indem ohne Auszüge aus Newtons Methodo Fluxionum und aus den Actis eruditorum von den Jahren 1684. bis 1691. beizubringen, und ohne

besond-

besondre Vergleichungen der wichtigsten Stellen dieser Schriften sich keine deutliche Erläuterungen über die Abweichungen der Newtonischen und Leibnizischen Begriffe und Belehrungsarten in dieser neuen Doctrin geben lassen. (*)

Daß

(*) In dem kurzen aber sehr gut gefaßten Abriß einer Lebensbeschreibung Newtons, welchen der beliebte historische Calender für das Jahr 1794. am Schluß auf 14 Blättern enthält, kommt der (mir unbekannte) Herr Verfasser auf eben die Erfindung Newtons, von welcher oben die Rede ist. „Im „Jahr 1671. war er schon (erzählt derselbe) im Be„siz der Methode, die Verhältnisse der Grösen be„stimmter Art, die ihnen wesentlich sind, oder die „dann statt finden, wenn sie ohne Rücksicht auf eine „bestimmbare Gröse, sondern als ursprünglich anfan„gend, oder als gleichförmig verschwindend, betrach„tet werden, und aus diesen Verhältnissen die Grö„sen, bei denen sie statt haben zu finden. Newton „gab diesen Verhältnissen den Namen Flaxionen. ——

Ich zweifle, und glaube mit vielem Recht zweifeln zu dürfen, ob die meisten Leser aus dieser Angabe einige genügende Einsicht von der Beschaffenheit der Erfindung erhalten dürften, welche Newtons Geist so würdig, und für die ganze Mathematik so wichtig war. Auch Leser, welche in Mathematik schon ziemlich wol bewandert sind, werden, wenn

sie

Daß es an und für sich sehr wichtig sei, in der Analysis des Unendlichen nicht blos Leibnizens Vorstellungen sich bekannt zu, welche in den meisten deutschen, auch französischen Lehrbüchern (beinahe mit Ausschluß der Newtonischen Fluxionen,) auseinander gesezzt zu werden pflegen, haben von Zeit zu Zeit die geschikktesten Mathematiker erinnert.

Die

---

sie nicht bereits selbst mit Fluxionen oder Differentialien fleisig gerechnet haben, wol schwerlich nur einigermasen zu deutlichen Vorstellungen über die Ausspähung Newtons durch diese und ähnliche Anzeigen gelangen. — — Aber ich bin entfernt, mich deswegen über den Verfasser des angeführten biographischen Abrisses aufzuhalten, oder ihm Vorwürfe wegen verschuldeter Unbestimmtheit und Undeutlichkeit seiner gelieferten Beschreibung zu machen. Ich bin vollkommen überzeugt, daß jeder Versuch auf eine populäre Weise über Newtons Fluxionen zu sprechen, ohne den Vortrag mit Figuren und Rechnungen zu belegen, misglükken müsse; und habe die Stelle nur angeführt, um die Behauptung in meinem obenstehenden Text selbst besser zu rechtfertigen, und strenge Forderungen, welche an mich selber von Lesern, die dieser mein lezter Aufsa etwa nicht befriedigen möchte, gemacht werden dürften, durch Hinweisung auf dieses Beispiel und die Betrachtung darüber, — von mir abzuwenden!

„Die Vorstellungsart von der Zusammensezzung „der krummen Linien aus unendlich kleinen gera„den Linien und ebnen Flächen (sagt einer (*) dersel„ben) hat für einen denkenden Kopf etwas anstö„siges, indem sie mit unsern Grundbegriffen von „der Natur und dem Entstehen der krummen Fi„guren zu streiten scheint. Es ist daher auch „darüber viel Streit entstanden. — Wer diesen „Theil der Mathematik aus Leibnizens und seiner „Schüler Schriften allein studiret, dem wird diese „Schwierigkeit weniger aufgelöset, als dem, der „die Engländer zu Lehrern nimmt. Newton sieht die „krummen Figuren, als durch ein nach bestimm„ten Regeln geschehenes Fortfliesen eines Punkts, „einer Linie, einer Fläche . . . entstanden an, „und hat keine Infinitesimaltheile einer andern „Natur.“ —

Wer sich die Mühe nehmen mag, in der Kästnerischen Anal. der Unend. die Paragraphen §. 31. . . . . §. 44. durchzustudiren, wird sich hievon zu überzeugen, noch mehrern Stoff finden. Die Erwägung daß dZ; dz; die sogenannten Differentialien von Z und z nicht G r ö s e n seien, um wel-

(*) Hr. Prof. Büsch in s. Encycloped. der Wissensch. Th. II. S. 36.

welche Z und z wirklich wachsen oder abnehmen, sondern um welche sie in einer Zeit wachsen oder abnehmen würden, wenn jedes sich mit der Geschwindigkeit fortführe, die es am Anfang dieser Zeit hatte; die Erwägung ist durch Leibniz und die, die ihm schlechthin folgten, fast gar nicht in Anregung gekommen, noch zu näherem Bedenken gegeben worden; und dennoch ist sie kaum zu umgehen, wenn man zu deutlichen Vorstellungen über die Acte, welche Fluxionen und Differentialrechnung (*) ausrichtet, durchzudringen sich ange-

ge-

(*) Es kann hiegegen eingewendet werden: Leibniz habe geflissentlich gar nichts von Zeit in seine Vorträge über Analysis des Unendlichen einmischen wollen. Allein auch darüber, was dafür an die Stelle zu sezzen sei, was diesen Begriff vertreten solle ... hat er sich nicht hinlänglich erklärt. Die Gelehrten seiner Zeit sehnten sich mit Verlangen nach der von ihm versprochenen Scientia infiniti; aber er blieb sie dem wartenden Publikum schuldig; und es ist wol erlaubt, zu vermuthen, daß ihn seine Verlegenheit, die gewünschte Auskunft mit vollkommener Deutlichkeit geben zu können, von der Erfüllung seines Versprechens abgehalten haben. Man findet diese Vermuthung unter andern auch in dem Briefwechsel über wichtige Sachen der Gelehrsamkeit. (Fortſ. 1756. S. 49.) und ich meine man

dürfe

gelegen seyn läßt. Wie sie aber verfolgt werden mus, um sehr weit, über alle erste Erwartung weit zu führen, kann nicht transitorisch oder mit oberflächlichen Reden, ohne Calcül ohne Figuren, und ohne besondre Anwendung auf schikklich aufgestellte und mittelst der Fluxionen zu lösende Probleme, erklärt werden.

Ich würde diese Erklärungen mit Vergnügen geben, und auch wol eine besondre Diatribe denselben widmen, wenn mir die Musse vergönnt wäre, welche dazu erforderlich ist, um dieses Geschäft mit Befriedigung durchführen zu können. Unzälige Abrufungen und Zerstreuungen in meiner bürgerlichen Situation erlauben mir aber nur äusserst selten anhaltende Speculationen, und deren Zusammenfassung in schriftliche Aufsäzze über die

---

dürfe sie warscheinlich finden, ohne daß man eben dadurch gegen die grose Ehrfurcht anstiese, welche Leibniz in unzähligen Rüksichten, und insbesondre auch in Beziehung auf seine Versuche in Analysis des Unendlichen, gewiß verdient. — Es würde mir sehr leid thun, wenn meine freimüthige Aeusserungen hie und da so ausgelegt werden möchten, als ob ich damit deutscher Ehre etwas vergeben, oder einen Heroen in Literatur, wie Leibniz, herabgewürdigt hätte.

die in Frage kommende Gegenstände. Es ist dabei freilich viel vorgearbeitet; aber blos eine vorsichtige Vergleichung und Prüfung dieser Vorarbeiten, welche die 3 lezten Denneia zerstreut geliefert haben, erfordert doch schon viele Zeit, Ruhe, und störungfreie Assiduität . . . . Die Nähe des Krieges am Rhein sezzt seit zwei Jahren jeden Bürger in meiner Gegend, (zumal den, der öffentliche Aemter begleitet) in ungewohnte (meistens ängstigende) Thätigkeit, und veranlaßt Besorgungen, die die Menschen der gegenwärtigen Generation (fast ohne Ausnahme) bisher gar nicht nur geahndet hatten. Mehr als zehnmal zogen reissige Kriegsheere, Geschüzz und Kriegswägen aller Art, vor meinen Fenstern vorüber, während ich meinen Newton in der Hand hatte, seinen Untersuchungen nachdenken, das Wesentliche daraus nach meinen Gedanken umbilden, und in einzelne Abhandlungen, wie die vorliegende, begreiffen wollte. Da vollends einigemal das Glükk den französischen Waffen günstig wurde, und ihr Vordringen bis an die Gegenden des Nekars die allgemeine Sorge war, fiel mir mehr als einmal der Gedanke ein, es könne wol über Nacht so weit kommen, daß ich meine analytische Lucubrationen in der Mitte abbrechen, und auf ein angefangenes Blatt Newtons Worte schreiben müßte:

Hoc tempore bellum ingruens — me coëgit
fugere & alia cogitare (*)

wiewol meine Entschließung bisher niemals auf Flucht gegangen ist, und ich, (auch, wenn ich fast überall um mich her schon einpakken, und Rüstungen zu schleunigem Abzug beinah' auf allen Seiten sahe) meinem Vorsaz, auf der angewiesenen Stelle in meiner Vaterstadt auszuhalten, keine Minute noch untreu worden bin . . . Daß aber der Reiz, algebraischen Erörterungen nachzuhängen, der unsäglichen Unruh unserer Tage, und dem allgemeinen Sturm und Drang,

— qui cogit, alia cogitare!

nachgeben müsse, ist ja wol sehr natürlich.

---

*) Man sehe auf den oben gelieferten Auszug seines Briefs in S. 22. zurück. Die Accomodation hat ganz statt, wenn man das Wort pestis in das verwandte bellum verwandelt.

Innhalt.

Innhalt.

Einleitung.

Bestimmung des Vorhabens bei diesem Werk.

Iste Diatribe.

Von Newtons Entdekkung des binomischen Lehrsazzes, und seiner Reihen für Kreisbögen.

§. 1.

Newtons Reihen, mitielst welcher er jeden Kreisbogen durch den zu ihm gehörigen (gegebenen) Sinus ausdrükkt, werden Leibnizen mitgetheilt; (im Jahr 1676;) wie auch die Reihe im umgekehrten Fall, wenn der Bogen gege-

ben ist. Leibniz wünscht, den Beweis des Verfarens hiebei mitgetheilt zu erhalten. S. 1 ... bis 3.

§. 2.

Die nächsten Antworten darauf von Collins und Newton geben blos Belehrungen über den Mechanismus der Reihen, und lezterer fügt wol auch die Form entwikkelter Potenzen von Binomien bei ... Der verlangte Beweis aber folgt noch nicht. S. 3. bis 9.

§. 3.

Leibniz fragt nach dem Ursprung des Theorems von erhöhten Binomien, und nach dem Grund der Gesezzlichkeit der Coefficienten, nach der die folgenden aus den ersten sich ableiten lassen. S. 9. bis 12.

§. 4.

Newton antwortet. (Aus einem der reichhaltigsten Briefe, die je geschrieben worden, wird ein Auszug geliefert, und die zur Hauptfrage gehörigen Stellen möglichst treu übersezt.)

Newton giebt an, auf welchem (ziemlich beschwerlichen) Wege er zu dem binomischen Lehrsaz, und zu den Reihen gelangt seie. S. 12. bis 22.

§. 5.

§. 5.

Uiber Bearbeitungen des binomischen Lehrsazzes von andern vielleicht vor Newton, auch nach ihm.

Uiber Joh. Wallis Verdienste, besonders in Beziehung auf die von ihm angegebene Art, Brüche durch Potenzen mit verneinten Exponenten darzustellen.

Auch etwas über die Schwürigkeit, Viele von der Wichtigket dieser Umgestaltung, wie auch von der, da Wurzeln durch gebrochne Exponenten ausgedrükkt werden, zu überzeugen. S. 22. bis 27.

§. 6.

Was dazu wol gehörte, oder am nächsten hinleitete, das binomische Theorem zu erfinden. Vermuthung einiger vorbereitenden Ideen Associationen in Newton S. 27. bis 38.

§. 7.

Zweifel gegen die gültige Ausdehnung des Theorems auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Beseitigung derselben; meistens durch Induction S. 39. bis S. 43.

§. 8.

§. 8.

Proben, die sich Newton geben konnte, und wohl auch gegeben hat, um der Richtigkeit seiner Reihen für Kreisbögen gewiß zu seyn. S. 43. bis S. 46.

§. 9.

Höhere Leitung durch Analogie, auf die er über der Ansicht von Wallis Reihen gerieth. S. 47.

Erläuterung der vollendeten Quadraturen, die dieser gab. S. 48. bis S. 56.

§. 10.

Glükkliche Durcharbeitung Newtons. — Verdiente Bewunderung. S. 56. bis S. 58.

§. 11.

Ueber die Ausbildung des binomischen Lehrsazzes durch Newton, in Hinsicht auf die Darstellung; zuvörderst bei Annahme ganzer Exponenten. S. 58. bis S. 63.

§. 12.

Darstellung der Binomial-Formeln, bei Annahme gebrochener Exponenten. S. 63. bis S. 68.

§. 13.

Anwendung auf die Reihen für den Kreis, so wol bei Bögen, als bei Flächen. S. 68. bis S. 75.

§. 14.

§. 14.

Nachweisung wegen Interpolationen. S. 75. bis S. 76.

IIte Diatribe.

Uiber Newtons Geschikk, grose Gesezze gewisser Theorie noch allgemeinern Gesezzen zu unterwerfen.

§. 1.

Uiber die Bemühungen des menschlichen Geistes, aus combinirten Erscheinungen allgemeine Gesezzlichkeiten zu bilden. Einleitung auf Newtons gelieferte Gleichungen zur Quadratur ganzer Geschlechter gewisser Curven. S. 77. bis S. 79.

§. 2.

Die ersten Wege dazu waren die Quadratur der Apollonischen Parabel; S. 79. bis 83; und darauf

§. 3.

Der cubischen Parabel, oder der Par. des andern Geschlechts. S. 83. bis S. 87.

§. 4.

Auch die Quadr. der Parabeln des 3ten Geschlechts wird gezeigt. S. 87. bis S. 89.

§ 5.

Zusammenstellung der Ordinaten-Gleichungen und Quadratur-Formeln, und Folgerung daraus auf allgemeinere Vorstellungsart. S. 89. bis S. 92.

§. 6.

Hinleitung zu Newtons Gedanken, ein noch allgemeineres Geschlecht unendlich vieler paralobischer Curven nebst deren Quadratur aufzustellen. S. 92. bis S. 94.

§. 7.

Zween Wege, auf welchen sich die Quadratur der Flächen unter diesen Curven darthun läßt. S. 94. bis S. 95.

§. 8.

Beleuchtung des dritten Weges, welchen Newton eingeschlagen, diesen Beweis zu geben. S. 95. bis S. 100.

§. 9.

Nachtrag über die Mittheilung des aufgeführten Beweises, von Newton. S. 100. bis S. 102.

§. 10.

Erläuterung zweier Beispiele, welche Newton, um die Ausdehnung seiner Formel zu zeigen, derselben zunächst beigefügt hat. S. 103. bis S. 109.

§. 11.

Ausdehnung derselben auch auf die Quadratur geradlinichter Figuren. S. 109. bis S. 113.

§. 12.

Eine Excursion über die Ideenbeschränktheit der gewöhnlichen Meßkünstler, welche Geometrie ohne Analysis lernen. S. 113. bis S. 116.

§. 13.

Noch weitere Ausdehnung der Newtonischen Formel auch auf die Quadratur hyperbolischer Flächen. S. 116. bis S. 122.

§. 14.

Benüzzung ebenderselben Formel, um Flächen unter zusammengesezzten Curven (curv composit.) zu quadriren. Erläuterung der Methode. S. 122. bis S. 124.

§. 15.

§. 15.

Quadratur der Hyperbel unter ihren Asymptoten nach Newtons und Leibnizens Methode. S. 124. bis S. 131.

§. 16.

Quadratur der Zirkelflächen nach Newtons Angabe mit fortgesezter Benůzzung seiner Fundamental-Formel. S. 131. bis S. 134.

§. 17.

Darstellung der bisher beleuchteten allgemeinen Ordinaten und Quadratur-Gleichungen in andern Gestalten. S. 134. bis S. 139.

§. 18.

Newtons Unternehmung, noch allgemeinere Formeln ausfindig zu machen, unter welchen die von §. 6. bis 17. benůzzte Ordinaten- und Quadratur-Gleichungen selbst (als Species unter einem Genus) stehen. S. 139. bis S. 146.

§. 19.

Erläuterung seiner Behauptung durch Beispiele. S. 146. bis S. 151.

§. 10.

Fortsezzung durch Induction.
Nebst einem Epilog, über Newtons unermüdete Bemühung, Erweiterungen seinen Speculationen zu geben. S. 151. bis S. 155.

IIIte Diatribe.

Durchzählung und Recension mehrerer vorzüglichen Entdekkungen Newtons in höherer Mathematik.

[I.]

Mittheilung seiner Methode, sich den Wurzeln numerischer Gleichungen (so nahe man will) zu nähern. S. 156. bis S. 159.

[II.]

Desgleichen seiner Art, Gleichungen mit 2 veränderlichen potentiirten Grösen (æquationes affectas) aufzulösen. S. 159. bis S. 162.

[III.]

Erfindung seines Paralelogramms; mit einigen Prämissen, um dessen Zwekk einigermasen einzusehen. S. 162. bis S. 166.

[IV.]

[IV]

Newtons Lehre, und Formeln: das Verhältnis zwischen den Coefficienten jeder Gleichung und den Summen der Potenzen, die ihre Wurzeln haben mögen, zu finden. S. 166. bis S. 169.

[V.]

Seine Entdekkungen über die Linien der 3ten Ordnung und deren Durchzählung. S. 169. bis S. 172.

[VI.]

Seine Auflösung des im Jahr 1697. von Joh. Bernoulli allen Mathematikern vorgelegten Problems aus höherer Mathematik. S. 172. 173.

[VII.]

Seine Untersuchungen über die mehrere Methoden, Tangenten an krumme Linien zu ziehen, oder die Subtangente allgemein zu bestimmen. S. 173. bis S. 175.

[VII.]

Seine Untersuchungen über die Auflösung unzäliger Fragen über die Vergleichung vorgelegter Krümmungen bei Curven aller Art, sowol in Bezie-

ziehung auf Gröse als auf Qualität der Curvatur. S. 175. bis S. 178.

[IX.]

Uiber die von ihm ausersonnene Fluxionen=Rechnung, und seine Zögerung in deren Mittheilung; Berührung des Streits mit Leibniz.

Auch noch Betrachtungen der Schwürigkeit, über diese grose Erfindung populär zu schreiben. S. 178. bis S. 186.

Epilog über die Lage des Verfassers. S. 186. bis S. 188.

Errata.

Errata.

Seite 54. komt 2mal Integrat vor, anstatt Integral.
Seite 71. lezte Zeile, mus in der Note der erste Bruch

$$\frac{s}{r^0} \text{ oder } \frac{s}{1} \text{ heissen}$$

Seite 72. Zeile 2 mus der Nenner in dem lezten Bruch mit Factoren

anstatt 1.2.3.5.7 heissen 1.2.3.8.7.

Seite 93. und 94. sind aus Versehen (oben im Paginiren) doppelt angegeben; man mus daher (in §. 7) diese Seitenzalen durch 93.b. 94.b. bemerken.

Bei diesem Anlaß hole ich auch ein Paar beschwerliche Drukkfehler in zwei andern Abhandlungen von meiner Hand nach:

In dem IIIten Heft meiner Betracht. über die Hyperbel ist auf S. 218. Zeile 3:

anstatt (x. Sin A + ...) zulesen: (x. Sin. B + ...)

und in dem Aufsaz des Deutsch. Merkurs vom Jahrg. 1792. nr. 5. S. 59. Zeile 12 ist anstatt dieser Herren zu lesen:

dieser Heroen

Endlich Seite 90. Zeile 2 anstatt LG ist zu lesen KG und ebenso (zehn Zeilen weiterhin) mus es noch zweimal in den 2 Proportionen daselbst heissen: CH zu KG.

Anhang.

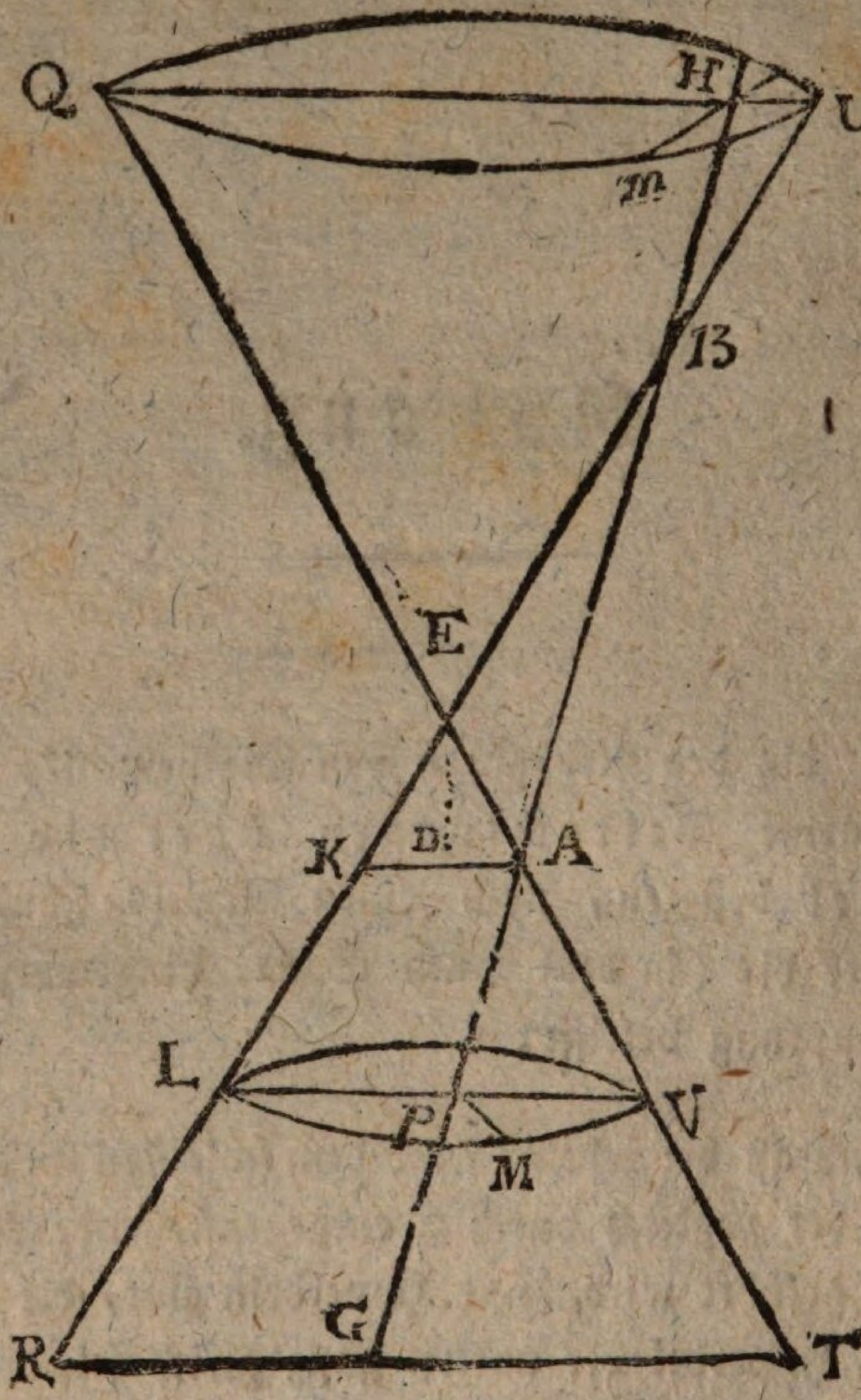
Anhang.

Ich bin den Liebhabern von Mathematik, welche meine Betrachtungen über die Hyperbel besizzen, noch einen Beweis schuldig, welcher die (in dem Buch S. 21. hingeworfene) Behauptung betrifft:

„Daß bei jedem, auch dem schiefsten Schnitt,
„der zugleich durch 2 entgegenstehende Kegel
„geführt wird, und Hyperbeln gibt, die obre
„Hyperbel der untern ganz gleich sei.

Man sehe die hiernächst stehende Figur an; und vergleiche sie mit Fig. XI. im IIIten Heft des allegirten Buchs.

Die



Die Linie HG zeigt die Richtung des Schnitts an. Um den Beweis zu führen, braucht man die Figur eigentlich nur bis LV.

In

In dem untern Conus sind AP und PM, Coordinaten; welche immer in Rechnung x und y heissen.

In 56. und §. 66. des Buchs über die Hyperbel ist dargethan, daß die Ordinaten-Gleichung, PM^2 oder yy

$= [g.n:x] [xx+2ax:2a]$ oder $= [g.n.(x+2a):2a]$

heisse. Die Ueberzeugung hievon sezze ich voraus.

In unsrer gegenwärtigen Figur ist im obern Conus zuerst nichts als bekannt angenommen, ausser die Länge der Linie HB = AP; also gleiche Abscissen, oben und unten.

Die Richtung des Schnitts, macht bei B einen ganz andern Winkel, als der Winkel des Schnitts bei A ist. Das fällt jedem in die Augen, und kann bei jedem schiefen Schnitt gar nicht anders seyn.

Man denke sich von B bis m eine Hyperbel-Curve; von der Curve bis H gehe eine gerade Linie, Hm, welche eine Ordinate oder ein Perpendikel auf QU, gewiß wie PM auf LV, ist.

Läßt sich nun beweisen, daß Hm, so gros, als PM sei, oder daß beeden eine und eben dieselbe

Glei-

Gleichung zukomme, so sind in dem obern Conus eben dieselbe Coordinaten vorhanden; und die Verhältnis

BH : Hm ist mit der
AP : PM identisch.

Daher die obre Hyperbel der untern, (da beede einen Durchmesser, AB, haben) durchgehends selbst gleich zu achten seyn mus.

Daß dem aber wirklich also sei, davon folgt nun hier sogleich der

Beweis

1) In dem Dreiekk BHU verhalten sich aus sehr bekannten Gründen (trigonometrisch)

Sin. U zu Sin B = wie BH zu HU

Der Winkel U ist aber dem bei K oder AKE gleich, weil AK und QU Paralelen sind. Aber Sin AKE ist = Cos. e, wenn der halbe Winkel am Scheitel e genannt wird, wie in dem IIIten Heft immer angenommenen worden. Hieraus folgt dann, daß die Linie HU = [Sin B. BH : Cos e] seyn müsse, oder weil BH, so lang als AP angenommeu, = x gilt, daß

HU = [Sin B. x : Cos e] sei.

2) Nun

2) Nun suche man auch eine Gleichung zu QH. Ohne Mühe zeigt sich die Analogie (aus Ansicht der Figur)

AP zu PV, wie AH zu HQ

und den Ausdrükken des IIIten Hefts gemäs, besagt eben so viel:

x zu n = wie (2a + x) zu HQ

woraus die Gleichung zu HQ in die Augen fällt:

$$\frac{n}{x} (2a + x) = HQ$$

3) Hm ist ein Loth auf dem Durchmesser QU; und gewiß

$$Hm^2 = HU \cdot HQ$$

Es hat damit eben die Beschaffenheit, wie mit PM, dem Loth auf dem Durchmesser, LV; darüber §. 56. im Heft III. nach zu sehen ist.

4) Man sezze nun die erst gefundene Aequivalente für HU und QH ein, so ergiebt sich

$$Hm^2 = \left[\text{Sin.B} \cdot x : \text{Cos e}\right] \left[\frac{n}{x} \cdot (2a + x\right]$$

Daß diese 2 Factoren in den Klammern [ ] ebensoviel, als die Gleichung zu yy betragen, läßt sich nun gar leicht vollends darthun.

5) Die Figur gibt, daß (Sin B : Cos e) so viel sei, als (AK : AB). Die Lage der zwei zulezt genannten Linien läßt nicht hieran zweifeln.

Aber

Aber AK : AB ist = g : 2a

Gewiß ist daher

$$Hm^2 = \left[g \cdot x : 2a\right] \left[\frac{n}{x} \cdot (2a + x)\right]$$

Daß aber

[gn : x] [(xx + 2ax) : 2a] od. [gn . (x + 2a) : 2a]
vollkommen eben so viel betrage, sieht nun wol jeder Buchstabenrechner schon ein.

Damit liegt also am Tage, daß der Grösse Hm^2 eben die Gleichung zukomme, welche PM^2 oder yy zukommt. Es mus daher auch allerdings Hm = PM seyn; und so ist an der Gleichheit der Coordinaten-Verhältnisse damit gar nicht mehr zu zweifeln:

BH zu Hm, wie AP zu PM

Da nun offenbar der Diameter AB oder 2a so gut zu der obern Hyperbel gehört, wie zu der untern, und mit jedem sich ändernden AP auch BH ganz gleich, oder ganz um eben so viel sich in Länge ändert; so ist nothwendig die obere Hyperbel der untern gar ohne Zweifel vollkommen gleich; und hiermit der versprochene Beweis zuverlässig gegeben.

Ich habe denselben aus keinem Buche entlehnt, sondern selber so ausgedacht. In d. Abh. des Hrn. De la Chapelle steht einer, ohne Trigonometrie, der mir beschwerlicher scheint, und den ich übersah, als ich für mich selbst einen suchte.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schübler, Christian L.

Über Newtons Scharfsinn

Leipzig 1794

Math.u. 178
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594271-8
VD18 10201858-005